Марчук О.В., д-р техн. наук, **Гнєдаш С.В.**, **Левківський С.А.**

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТОСТІННИХ ОБОЛОНОК ПРИ ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ ДОТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Анотація: Розглянуто два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстих циліндричних оболонок. Перший підхід засновано на розділенні циліндричної оболонки по товщині концентричними поверхнями на ряд складових циліндричних оболонок, достатньо тонких, щоб можна було нехтувати зміною їх кривизни по товщині. Для апроксимації шуканих функцій в плані і за товщиною використовують поліноми. Другий підхід засновано на розкладанні переміщень та напружень в плані кінцевого елемента в ряди Фур'є з коефіцієнтами, які є функціями поздовжньої координати оболонки. З використанням розглянутих підходів проведено аналіз напружено-деформованого стану оболонок під впливом локальних дотичних навантажень.
Ключові слова: локальні дотичні навантаження, напружено-деформований стан.

УДК 539.3

Марчук А.В., доктор техн. наук, **Гнедаш С.В.**, **Левковский С.А.**

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Аннотация: Рассмотрены два подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек. Первый подход основан на разделении цилиндрической оболочки по толщине концентрическими поверхностями на ряд составляющих цилиндрических оболочек, достаточно тонких, чтобы можно было пренебрегать изменением их кривизны по толщине. Для аппроксимации искомых функций в плане и по толщине используют полиномы. Второй подход основан на разложении перемещений и напряжений в плане конечного элемента в ряды Фурье с

коэффициентами, которые являются функциями продольной координаты оболочки. С использованием рассмотренных подходов проведен анализ напряженно-деформированного состояния оболочек под влиянием локальных касательных нагрузок.
Ключевые слова: локальные касательные нагрузки, напряжённо-деформированное состояние.

UDC 539.3

Marchuk O.V., Dr. Tech. Sci.**, Hniedash S.V., Levkivskyi S.A.**

THE STRESS-STRAIN STATE OF THICK-WALLED SHELLS UNDER THE ACTION OF LOCAL SHEAR LOADS

Abstract: Two approaches to the study of the stress-strain state of thick cylindrical shells are considered. The first approach is based on the separation of a cylindrical shell over the thickness by concentric surfaces into a number of constituent cylindrical shells that are thin enough to neglect the change in their thickness curvature. The polynomials are used to approximate the unknown functions in plan and in thickness. The second approach is based on the expansion of displacements and stresses in the plan of the finite element in Fourier series with coefficients that are functions of the longitudinal coordinate of the shell. With the use of the approaches considered, the stress-strain state of the shells was analyzed under the influence of local shear loads.
Keywords: local shearing stress load, stress-strain state.

Вступ

Перелік робіт по розрахунку циліндричних оболонок можна знайти в оглядах [1-3,5-9,12-15]. Робіт по розрахунку товстостінних оболонок великої кривизни з розміром площі навантаження сумірної з товщиною оболонки мало. Розраховувати такого типу оболонки дозволяють підходи, розроблені в [1,2].

В даній статті на основі підходів, розроблених авторами, проаналізовано напружено-деформований стан товстостінних анізотропних оболонок великої кривизни в умовах осесиметричного згинання при дії локальних дотичних навантажень.

1 Методика кінцевих елементів на основі поліноміальної апроксимації (П1)

Використовуємо відому апроксимацію шуканих переміщень за товщиною оболонки [4,10] :

$$U_x^{(k)}(x,r)=U_{xl}^{(k)}(x)\,f_l^{(k)}(r)+\frac{\partial}{\partial x}W_p^{(k)}(x)\varphi_p^{(k)}(r);$$

$$U_\theta^{(k)}(x,r)=U_{\theta l}^{(k)}(x)\,f_l^{(k)}(r);$$

$$U_r^{(k)}(x,r)=W_p^{(k)}(x)\beta_p^{(k)}(r),\ \ (l=1,2;\quad p=1,2,3). \qquad (1)$$

Тут $U_{x1}^{(k)}(x)$, $U_{x2}^{(k)}(x)$ – тангенціальні переміщення на лицевих поверхнях конструкції; $U_{\theta 1}^{(k)}(x)$, $U_{\theta 2}^{(k)}(x)$ – колові переміщення на лицевих поверхнях конструкції; $W_1^{(k)}$, $W_2^{(k)}$ – нормальні переміщення на лицевих поверхнях конструкції, $W_3^{(k)}$ – функція зсуву; $f_1^{(k)}(r)$, $f_2^{(k)}(r)$, $\beta_1^{(k)}(r)$, $\beta_2^{(k)}(r)$ – задані поліноми першого ступеня; $\varphi_1^{(k)}(r)$, $\varphi_2^{(k)}(r)$,$\beta_3^{(k)}(r)$ – другого ступеня; $\varphi_3^{(k)}(r)$ – третього ступеня.

Для апроксимації шуканих функцій в плані конструкції вводимо подання лінійними і кубічними поліномами.

$$U_{xl}^{(k)}(x)=U_{xl1}^{(k)}f_{u1}(x)+U_{xl2}^{(k)}f_{u2}(x);$$

$$U_{\theta l}^{(k)}(x)=U_{\theta l1}^{(k)}f_{u1}(x)+U_{\theta l2}^{(k)}f_{u2}(x);$$

$$W_p^{(k)}(x)=W_{p1}^{(k)}f_{w1}(x)+\alpha_{p1}^{(k)}f_{w2}(x)+W_{p2}^{(k)}f_{w3}(x)+\alpha_{p2}^{(k)}f_{w4}(x), \qquad (2)$$

де $f_{u1}(x)=1-x/a$; $f_{u2}(x)=x/a$;

$$f_{w1}(x)=\frac{2x^3-2ax^2+a^3}{a^3};\ f_{w2}(x)=\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{a^2};$$

$$f_{w3}(x)=\frac{-2x^3+3ax^2}{a^3};\ f_{w4}(x)=\frac{x^3-ax^2}{a^2};$$

a – довжина кінцевого елементу.

Рівняння рівноваги кінцевого елемента отримуємо на основі варіаційного рівняння Лагранжа.

З урахуванням введеної апроксимації вони приймають такий вигляд:

$$\int_0^a \{[(D11^{(k)}_{\bar{l}l}\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}\frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x}+(T11^{(k)}_{\bar{l}l}+\frac{1}{r^{(k)}}T21^{(k)}_{\bar{l}l})f_{us}(x)f_{u\bar{s}}(x))U^{(k)}_{xls}+$$

$$+(((D12^{(k)}_{\bar{l}p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D13^{(k)}_{\bar{l}p}\frac{1}{r^{(k)}}+D14^{(k)}_{\bar{l}p})f_{wc}(x))\frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x}+(T12^{(k)}_{\bar{l}p}+$$

$$+\frac{1}{r^{(k)}}T22^{(k)}_{\bar{l}p})\frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x}f_{u\bar{s}}(x))\overline{W}^{(k)}_{pc}+(D15^{(k)}_{\bar{l}l}\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}\frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x}+(T13^{(k)}_{\bar{l}l}+$$

$$+\frac{1}{r^{(k)}}T23^{(k)}_{\bar{l}l}+\frac{1}{r^{(k)2}}T14^{(k)}_{\bar{l}l})f_{us}(x)f_{u\bar{s}}(x))U^{(k)}_{\theta ls}-q^{(k)}_{x\bar{l}}(x)f_{u\bar{s}}(x)]\delta U^{(k)}_{x\bar{l}\bar{s}}+$$

$$+[(D21^{(k)}_{\bar{p}l}\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2}+(D31^{(k)}_{\bar{p}l}+\frac{1}{r^{(k)}}D41^{(k)}_{\bar{p}l})\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}f_{w\bar{c}}(x)+$$

$$+(T31^{(k)}_{\bar{p}l}+\frac{1}{r^{(k)}}T41^{(k)}_{\bar{p}l})f_{us}(x)\frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x})U^{(k)}_{xls}+(((D22^{(k)}_{\bar{p}p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D23^{(k)}_{\bar{p}p}\frac{1}{r^{(k)}}+$$

$$+D24^{(k)}_{\bar{p}p})f_{wc}(x))\frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2}+((D32^{(k)}_{\bar{p}p}+\frac{1}{r^{(k)}}D42^{(k)}_{\bar{p}p})\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(D33^{(k)}_{\bar{p}p}\frac{1}{r^{(k)}}+$$

$$+D43^{(k)}_{\bar{p}p}\frac{1}{r^{(k)2}})+(D34^{(k)}_{\bar{p}p}+\frac{1}{r^{(k)}}D44^{(k)}_{\bar{p}p}))f_{wc}(x))f_{w\bar{c}}(x)+(T32^{(k)}_{\bar{p}p}+$$

$$+\frac{1}{r^{(k)}}T42^{(k)}_{\bar{p}p})\frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x}\frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x})\overline{W}^{(k)}_{pc}+[(D25^{(k)}_{\bar{p}l}\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2}+$$

$$+(D35^{(k)}_{\bar{p}l}+\frac{1}{r^{(k)}}D45^{(k)}_{\bar{p}l})\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}f_{w\bar{c}}(x)+(T33^{(k)}_{\bar{p}l}+\frac{1}{r^{(k)}}T43^{(k)}_{\bar{p}l}+$$

$$+\frac{1}{r^{(k)2}}T44^{(k)}_{\bar{p}l})f_{us}(x)\frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x})U^{(k)}_{\theta ls}-q^{(k)}_{r\bar{p}}(x)f_{w\bar{c}}(x)]\delta\overline{W}^{(k)}_{\bar{p}\bar{c}}$$

$$[(D51^{(k)}_{\bar{l}l}\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}\frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x}+(T51^{(k)}_{\bar{l}l}+\frac{1}{r^{(k)}}T61^{(k)}_{\bar{l}l})f_{us}(x)f_{u\bar{s}}(x))U^{(k)}_{xls}+$$

$$+(((D52^{(k)}_{\bar{l}p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D53^{(k)}_{\bar{l}p}\frac{1}{r^{(k)}}+D54^{(k)}_{\bar{l}p})f_{wc}(x))\frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x}+(T52^{(k)}_{\bar{l}p}+$$

$$+\frac{1}{r^{(k)}}T62^{(k)}_{\bar{l}p})\frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x}f_{u\bar{s}}(x))\overline{W}^{(k)}_{pc}+(D55^{(k)}_{\bar{l}l}\frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x}\frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x}+(T53^{(k)}_{\bar{l}l}+$$

$$+\frac{1}{r^{(k)}}T53^{(k)}_{\bar{l}l}+\frac{1}{r^{(k)2}}T54^{(k)}_{\bar{l}l})f_{us}(x)f_{u\bar{s}}(x))U^{(k)}_{\theta ls}-$$

$$-q^{(k)}_{\theta\bar{l}}(x)f_{u\bar{s}}(x)]\delta U^{(k)}_{\theta\bar{l}\bar{s}}\}dx=0. \qquad (3)$$

Тут $\overline{W}^{(k)}_{p1}=W^{(k)}_{p1}$; $\overline{W}^{(k)}_{p2}=\alpha^{(k)}_{p1}$; $\overline{W}^{(k)}_{p3}=W^{(k)}_{p2}$; $\overline{W}^{(k)}_{p4}=\alpha^{(k)}_{p2}$.

2 Напіваналітичний метод кінцевих елементів (П2)

Введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напружень в плані кінцевого елемента [4,11]:

$$\begin{aligned}
U^{(k)}_{x}(x,r)&=\varphi_1(x)v^{(k)}_{x1}(r)+\varphi_2(x)v^{(k)}_{x2}(r);\\
U^{(k)}_{\theta}(x,r)&=\varphi_1(x)v^{(k)}_{\theta 1}(r)+\varphi_2(x)v^{(k)}_{\theta 2}(r);\\
U^{(k)}_{r}(x,r)&=\varphi_1(x)w^{(k)}_{1}(r)+\varphi_2(x)w^{(k)}_{2}(r);\\
\sigma^{(k)}_{xr}(x,r)&=\varphi_1(x)\tau^{(k)}_{x1}(r)+\varphi_2(x)\tau^{(k)}_{x2}(r);\\
\sigma^{(k)}_{\theta r}(x,r)&=\varphi_1(x)\tau^{(k)}_{\theta 1}(r)+\varphi_2(x)\tau^{(k)}_{\theta 2}(r);\\
\sigma^{(k)}_{rr}(x,r)&=\varphi_1(x)\sigma^{(k)}_{1}(r)+\varphi_2(x)\sigma^{(k)}_{2}(r),
\end{aligned} \qquad (4)$$

де $\varphi_1(x)=1-\frac{x}{a}$; $\varphi_2(x)=\frac{x}{a}$;

a – довжина кінцевого елементу;

$v^{(k)}_{xi}(r)$, $v^{(k)}_{\theta i}(r)$, $w^{(k)}_{i}(r)$, $\tau^{(k)}_{xi}(r)$, $\tau^{(k)}_{\theta i}(r)$, $\sigma^{(k)}_{i}(r)$ – шукані функції розподілу переміщень і напружень в і-тому вузлі (координата x спрямована уздовж оболонки).

Роздільна система диференціальних рівнянь для шару з урахуванням кінематичних граничних умов на контурі оболонки для такої апроксимації має вигляд:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -K_{01} & 0 & B_{55}^{(k)}K_{00} & 0 & B_{45}^{(k)}K_{00} \\ -B_{13}^{(k)}K_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}}B_{23}^{(k)}K_{00} & -B_{36}^{(k)}K_{01} & 0 & B_{33}^{(k)}K_{00} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}}K_{00} & B_{45}^{(k)}K_{00} & 0 & B_{44}^{(k)}K_{00} \\ B_{11}^{(k)}K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{12}^{(k)}K_{10} & B_{16}^{(k)}K_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}}K_{00} & B_{13}^{(k)}K_{10} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}}B_{21}^{(k)}K_{01} & \frac{1}{(r^{(k)})^2}B_{21}^{(k)}K_{00} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}K_{01} & K_{10} & \frac{1}{r^{(k)}}(B_{1r}^{(k)}-1)K_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)}K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}K_{10} & B_{66}^{(k)}K_{11} & 0 & B_{36}^{(k)}K_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}}K_{00} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \{v_x^{(k)}(r)\} \\ \{v_\theta^{(k)}(r)\} \\ \{w^{(k)}(r)\} \\ \{\tau_x^{(k)}(r)\} \\ \{\tau_\theta^{(k)}(r)\} \\ \{\sigma^{(k)}(r)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Тут K_{00} складена з урахуванням граничних умов на основі матриці

$$k_{00} = \begin{bmatrix} a/3 & a/6 \\ a/6 & a/3 \end{bmatrix};$$

K_{10} – на основі матриці $k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix};$

K_{11} – на основі матриці $k_{11} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a \\ -1/a & 1/a \end{bmatrix};$

$$\{v_{xi1}^{(k)}(r)\}^T = \{\ldots, v_{xi1}^{(k)}(r), \ldots\}; \quad \{v_{\theta i2}^{(k)}(r)\}^T = \{\ldots, v_{\theta i2}^{(k)}(r), \ldots\};$$

$$\{w_{i3}^{(k)}(r)\}^T = \{\ldots, w_{i3}^{(k)}(r), \ldots\}; \quad \{\tau_{xi4}^{(k)}(r)\}^T = \{\ldots, \tau_{xi4}^{(k)}(r), \ldots\};$$

$$\{\tau_{\theta i5}^{(k)}(r)\}^T = \{\ldots, \tau_{\theta i5}^{(k)}(r), \ldots\}; \quad \{\sigma_{i6}^{(k)}(r)\}^T = \{\ldots, \sigma_{i6}^{(k)}(r), \ldots\},$$

де i – номер точки, в якій визначаються шукані функції.

Вектор шуканих функцій може буть представлений наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \left\{ v_{xi1}^{(k)} \right\} \\ \left\{ v_{\theta i2}^{(k)} \right\} \\ \left\{ w_{i3}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{xi4}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{\theta i5}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \sigma_{i6}^{(k)} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i1}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i2}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i3}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i4}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i5}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i6}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{bmatrix} \left[C^{(k)} \right], \qquad (6)$$

де $\left[C^{(k)}\right]^T = \left[C_1^{(k)} e^{r\beta_1^{(k)}} ,..., C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}} ,..., C_J^{(k)} e^{r\beta_J^{(k)}} \right]$;

$\beta_j^{(k)}$ – корені характеристичного рівняння розв'язної системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними;

$\mu_{i1}^{(k)}(j),\ \mu_{i2}^{(k)}(j),\ \mu_{i3}^{(k)}(j),\ \mu_{i4}^{(k)}(j),\ \mu_{i5}^{(k)}(j),\ \mu_{i6}^{(k)}(j)$ – її власні вектори;

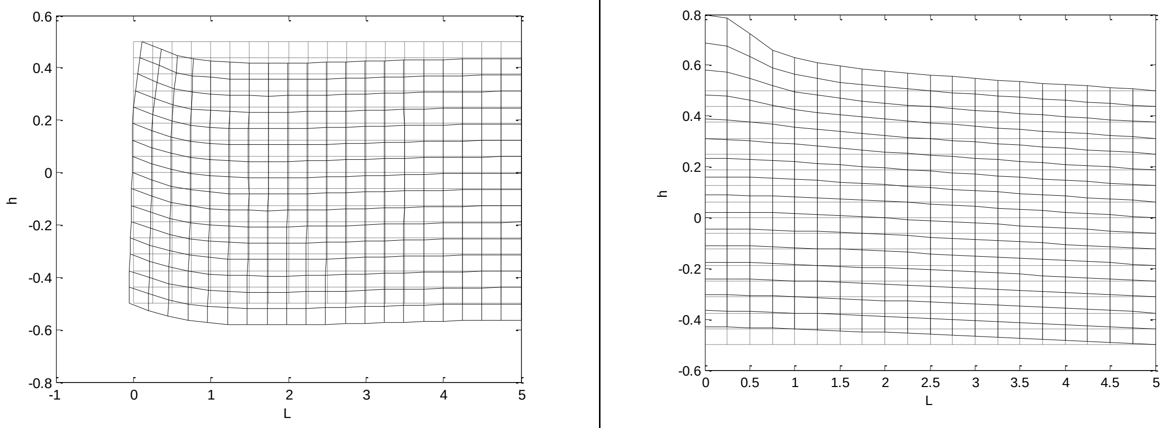
$C_j^{(k)}$ – постійні інтегрування, які визначаються з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі сітки розбиття конструкції на кінцеві елементи;

J – загальна кількість шуканих функцій в шарі.

3 Приклади розрахунку

Розглянемо чотиришарову анізотропну оболонку з наступними фізико-механічними характеристиками: $E_x^{(1)}/E_\theta^{(1)} = 25/1$; $E_\theta^{(1)} = E_r^{(1)}$; $G_{x\theta}^{(1)}/E_r^{(1)} = 0{,}5/1$; $G_{\theta r}^{(1)}/E_r^{(1)} = 0{,}2/1$; $G_{xr}^{(1)} = G_{x\theta}^{(1)}$; $\nu_{x\theta}^{(1)} = \nu_{xr}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(1)} = 0{,}25$; $L/h = 10$; $h/R = 1/10$. Шари почергово повернуті на $45°$; $-45°$; $45°$; $-45°$. На торцях оболонки заборонені вертикальні переміщення $U_r = 0$. Розглядалася половина оболонки, яка ділилася на 100 елементів.

На рис. 1. показано характер деформування вищенаведеної оболонки при дії локального скручувального навантаження, яке прикладене на лівому та правому кінці оболонки на її зовнішній поверхні.



(в лівому стовпці наведені переміщення U_r , які відкладаються вертикально і переміщення U_x , які відкладаються горизонтально; в правому стовпці наведені переміщення U_θ , які відкладаються вертикально).

Рисунок 1 – Характер переміщень анізотропного циліндра при локальному крутному навантаженні

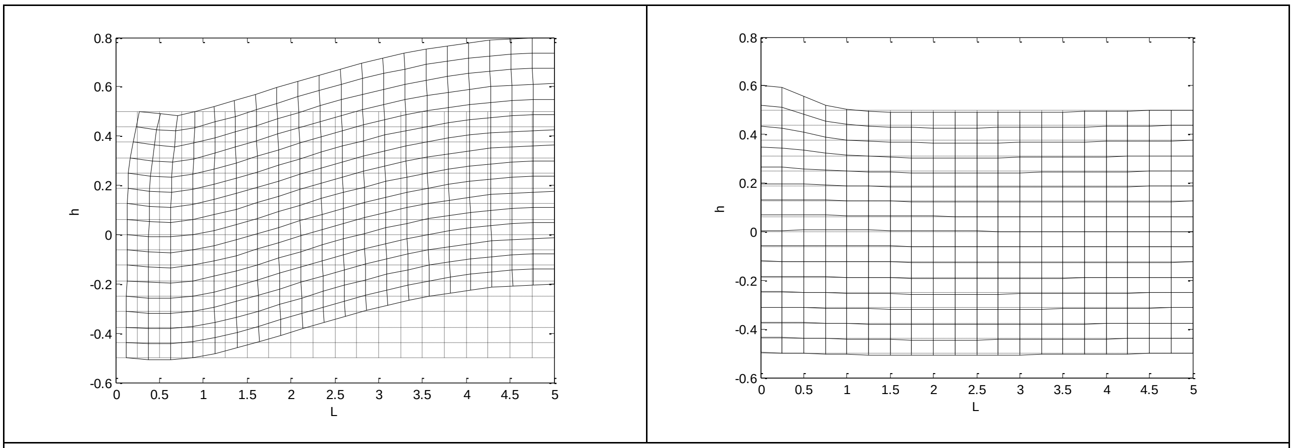
В таблиці 1 наведені результати розрахунку ($\bar{U}_r = U_r(L/2,z)E/q_{31}$; $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(L\cdot 10/(2\cdot 100),z)/q_{31}$; $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(L\cdot 10/(2\cdot 100),z)/q_{31}$; $\bar{\sigma}_{x\theta} = \sigma_{x\theta}(L\cdot 10/(2\cdot 100),z)/q_{31}$, z – на межах шарів).

Таблиця 1 - Максимальні переміщення на межах шарів

Номер шару	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{x\theta}$	
	П1	П2	П1	П2	П1	П2	П1	П2
1	-.2672 -.2675	-.2661 -.2665	.2309 -.1752	.2290 - .1751	.1230 -.2247	.1216 - .2244	.1194 -.2151	.1180 - .2145
2	-.2675 -.2687	-.2665 -.2677	.3150 .0683	.3136 .0683	.2655 .0361	.2644 .0364	-.3061 -.0800	-.3048 -.0805
3	-.2687 -.2687	-.2677 -.2676	-.2018 -1.439	-.2027 - 1.442	-.2339 -1.418	-.2346 -1.422	-.2066 -1.434	-.2074 -1.430
4	-.2687 -.2707	-.2676 -.2696	.5158 1.517	.5130 1.659	.5360 2.855	.5333 2.902	-.6505 -4.028	-.6474 -3.760

У даному випадку необхідна точність по тілу оболонки досягається при поділу кожного шару на чотири підшари, за виключенням точки на зовнішній поверхні при $x = L\cdot 10/(2\cdot 100)$, де закінчується навантаження. Саме там напружено-деформований стан досягає максимальної величини. Досягти достатньої точності в цій точці при розрахунку по моделі П1 можна тільки при поділенні кожного шару на 256 підшарів.

На рис. 2 показаний характер деформування вищенаведеної оболонки при дії локального дотичного навантаження, яке прикладене на лівому та правому кінці оболонки на її зовнішній поверхні.



(в лівому стовпці наведені переміщення U_r, які відкладаються вертикально і переміщення U_x, які відкладаються горизонтально; в правому стовпці наведені переміщення U_θ, які відкладаються вертикально).

Рисунок 1 – Характер переміщень анізотропного циліндра при локальному дотичному навантаженні

В таблиці 2 наведені результати розрахунку ($\bar{U}_r = U_r(L/2,z)E/q_{31}$; $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(L/2,z)/q_{31}$; $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(L/2,z)/q_{31}$; $\bar{\sigma}_{x\theta} = \sigma_{x\theta}(L/2,z)/q_{31}$, z – на межах шарів)

Таблиця 2 - Максимальні переміщення на межах шарів

Номер шару	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{x\theta}$	
	П1	П2	П1	П2	П1	П2	П1	П2
1	1.4518 1.4577	1.4532 1.4590	-.9088 -.6043	-.9099 - .6052	-.4831 -.2282	-.4836 -.2289	-.6143 -.3611	-.6149 -.3611
2	1.4577 1.4606	1.4590 1.4618	-.7973 -.5356	-.7989 - .5366	-.4212 -.1909	-.4225 -.1917	.5662 .3302	.5668 .3303
3	1.4606 1.4620	1.4618 1.4637	-.5101 -.2338	-.5105 - .2328	-.1654 .0805	-.1656 .0817	-.3031 -.0510	-.3026 -.0498
4	1.4620 1.4629	1.4637 1.4641	-.4663 -.1762	-.4659 - .1749	-.1520 .0867	-.1515 .0880	.2981 .0640	.2975 .0629

У даному випадку необхідна точність при розрахунку по моделі П1 у центрі оболонки (максимальні напруження) досягається при поділі кожного шару на чотири підшари.

Висновки

Обидва запропонованих підходи дозволяють розглядати товстостінні анізотропні оболонки, навантажені локальним дотичним навантаженням з достатнім степенем точності. Найбільш складним випадком є навантаження оболонки локальним дотичним скручувальним навантаженням. Для отримання достовірного результату під навантаженням, де напружений стан максимальний, при розрахунку на основі методу скінченних елементів необхідно кожний шар розбивати на 256 підшарів. Якщо локальне дотичне навантаження направлено вздовж твірної, максимальні напруження виникають у центрі оболонки і для такого випадку при розрахунку на основі методу скінченних елементів достатньо кожний шар розбити на чотири підшари. При розрахунку напіваналітичним методом скінченних елементів необхідності в розбитті шарів на підшари в розглянутих випадках не виникало.

Література

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наукова думка,1991. – 216 с.

2. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.:Академпериодика, 2006. – 472 с.

3. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел // К.: НИИ СМ, 1993. – 376 с.

4. Марчук А.В., Рассказов О.О., Гнєдаш С.В., Левківський С.А. Анализ напружено-деформованого стану товстостінних анізотропніх циліндричних оболонок, схильних до локального впливу // Опір матеріалів та теорія споруд– Київ. – 2015. – Вип. 94. – С. 186-192.

5. Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E. Analis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined interal pressure and thermo-mechanical loading wich thermal variations // Compos. Struct. – 2009.– 88. – P. 532– 541.

6. Grigorenko, Ya.,M., Yaremchenko, S.,N.: Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylidrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech.- 2008.- 40,N9.- P. 998-1005.

7. Grigorenko, Ya.,M., Grigorenko, A.,Ya., Zakhariychenko, L.,I. : Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated llipticcross-section // Int. Appl. Mech.-2009.- 43,N12.- P.1372-1379 .

8. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech.–2013.– 49,N2.– P.123-193.

9. Hosine A., Chapelle D., Baubakar M.L.,et al. Experimental and analytical investigation of the cylindsrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // Int. J. Press. Vess. Piping.– 2009.– 86.– P.649– 655.

10. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthorropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Composite Materials..– 1999.–35,N4.–P.285–292.

11. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // Mechanics of Composite Materials. – 1997.– 33,N6.–P.553-556.

12. Marchuk A.V., Il'chenko Ya. L.,and Gnedash S.V. Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells.// Int. Appl. Mech.–2011.– 47,N4.– P.449–455 .

13. Noor A.K., Burton W.S., and Peter J.M. Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // Int. J. Solids Struct.– 1991.– 27.No.10.– P.1269-1286.

14. Sheng H.Y. and Ye J.Q. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // Comp. Methods Appl. Mech. Eng.– 2003.– 192.– P.2441-2459.

15. Shuvalov A.I. and Soldatos K.P. On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially ingomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // J. Sound Vibr.– 2003.– 259,No.1.– P.233.– 239.

Рецензенти:
Гамеляк І.П., д-р техн. наук, Національний транспортний університет.
Снитко В.П. канд. нехн. наук. Національний транспортний університет.

Reviewers:
Gameliak I.P., Dr. Tech. Sci., National Transport University.
Snytko V. P., Cand. Eng. Sci. (Ph.D.), National Transport University.

Стаття надійшла до редакції: **03.03.2017 р**.