УДК 624.21

Ткачук С.Г., д-р техн. наук, **Башкевич І.В.**, канд. техн. наук

ОБГРУНТУВАННЯ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ РУСЛОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПІД МОСТОВИМИ ПЕРЕХОДАМИ

Анотація. В статті розглядаються умови за яких застосовуються різні види початкових умов для аналітичної реалізації математичної моделі загального розмиву на мостових переходах через рівнинні річки. Даються практичні рекомендації щодо розв'язку задачі Коші в кожному конкретному розрахунковому випадку.
Ключові слова: мостовий перехід, загальний розмив, багаторічне прогнозування руслових деформацій, кубічний сплайн.

Аннотация. В статье рассматриваются условия, при которых применяются различные виды начальных условий для аналитической реализации математической модели общего размыва на мостовых переходах через равнинные реки. Даются практические рекомендации по решению задачи Коши в каждом конкретном расчетном случае.
Ключевые слова: мостовой переход, общий размыв, многолетнее прогнозирование русловых деформаций, кубический сплайн.

Abstract. The article examines terms for which the different types of initial conditions are used for analytical realization of mathematical model of general floodwater erosion on bridge crossing through the flat rivers. Practical recommendations are given in relation to the decision of task of Koshi in every concrete calculation case.
Keywords: bridge, riverbed deformations, long-term forecasting of common washout, cubic spline.

Найважливіша задача проектування мостових переходів полягає в обґрунтуванні їх генеральних розмірів, таких як: ширина отвору, відмітка низу прогонової будови і верху насипів підходів, заглиблення фундаментів биків і стоянів, розмірів та розташування регуляційних споруд. Провідною у цьому переліку проектних характеристик мостових переходів є ширина отвору, яка власне і визначає довжину мосту. Здебільшого головним чинником для обґрунтування величини отвору визначається величиною розмиву.

В системі багаторічного прогнозування [1] величини загального розмиву математична модель руслових деформацій повинна складатися як мінімум з чотирьох залежностей [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial l} - B \cdot \dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 & \text{- рівняння балансу наносів;} \\ G = A_{\partial} \cdot B \cdot V^{m} & \text{- транспортуюча спроможність потоку;} \\ Q = B \cdot h \cdot V & \text{- рівняння нерозривності потоку;} \\ \beta_p = \left(1 - \dfrac{l}{R}\right)^{-1} & \text{- характеристика трансформації руслової витрати.} \end{cases} \tag{1}$$

де G і Q – витрати наносів і води; h і B_p- глибина і ширина русла; V – швидкість руслового потоку; A і m – коефіцієнт і показник, що враховують фізичні властивості наносів; β_p – коефіцієнт трансформації; R – параметр центральної струмини.

Щоб отримати єдине рішення, відповідне умовам задачі треба задати початкові умови. Тоді задача прогнозу руслових переформувань і деформацій зводиться до задачі Коші, в якій початковими умовами є поздовжній профіль дна русла.

Можливі чотири види початкових умов, які відповідають двом розрахунковим схемам. Перша розрахункова схема приймається тоді, коли перший паводок проходить по пласкому дну. Друга розрахункова схема – коли для першого паводку неможливо прийняти дно пласким:

1) дно приймається пласким. В цьому випадку початкові умови задаються природним поздовжнім профілем, який після осереднення відміток дна в зоні впливу мостового переходу в першому наближенні можна апроксимувати площиною, тобто вважати, що

$$h = h_{pn} \tag{2}$$

де h_{pn} – середня природна глибина в руслі. Якщо розрахункова повінь проходить першою по такому пласкому дну, то руслові деформації за багаторічний період будуть щонайменші і відповідати верхній границі розмиву.

2) дно приймається вже здеформоване (розмите) повінню, що пройшла раніше. За цих умов поздовжній профіль дна русла описується залежністю [3]:

$$h = h_{зал} \cdot \left[0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + \frac{20 \cdot A \cdot \Gamma \cdot \beta_m^{\,4} \cdot \left(\beta_m - 1\right)}{l_c \cdot B_p^{\,4} \cdot h_{зал}^{\,5}}} \right]^{1/5} \tag{3}$$

де h_{pn} – залишкова глибина в руслі під мостом від попередньої повені; A – функція фізико-механічних властивостей наносів; β_m – коефіцієнт стиснення потоку під мостом; B_p – ширина русла; l_c – довжина зони стиснення; $\Gamma = \int Q_{pn}^{\,4} dt$ - інтегральна функція гідрографа руслової витрати Q_{pn}.

Для другої і наступних паводків початкові умови задаються залежністю (3), в якій значення всіх величин відповідають моменту звільнення заплав від води. Іншими словами початковими умовами для кожного наступного паводку стає поздовжній профіль розмитого дна після попереднього паводку.

Коли неможливо прийняти дно пласким, тобто є вирви або пасма, то поздовжній профіль можна апроксимувати за допомогою кубічного сплайну, який в останній час набув значного поширення в різних галузях науки і техніки. Застосування кубічного сплайну обумовлено тим, що поліном третього ступеня є простою кривою, що має точку перегину, яка забезпечує його добрі інтерполяційні можливості. Кубічні сплайни мають на всьому відрізку апроксимації безперервні похідні до другого порядку. Така гладкість зазвичай виявляється достатньою для більшості завдань. Невисока степінь полінома спрощує обчислення і зменшує обчислювальну похибку. В якості початкових умов кубічних сплайн може бути двох видів: кубічний сплайн в похилах і кубічний сплайн через моменти.

3) локальний спосіб задання поздовжнього профілю кубічним сплайном в похилах [4].

Формула для інтерполяційного многочлена Ерміта

$$H_3(x) = y_o + (x - x_o) \cdot y_o + (x - x_o)^2 \cdot \left(\frac{y_1 - y_2}{\left(x_1 - x_o\right)^2} - \frac{y_o{}'}{x_1 - x_o} \right) + (x - x_o)^2 \cdot (x - x_1) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{y_1{}' - y_o{}'}{\left(x_1 - x_o\right)^2} - \frac{2 \cdot \left(y_1 - y_o\right)}{\left(x_1 - x_o\right)^3} \right) \tag{4}$$

з двома вузлами кратності 2, що виражає інтерполяційний кубічний многочлен на відрізку $\left[x_i ; x_{i+1}\right]$ через значення функції y_i і її похідних m_i в граничних точках відрізку. Отримаємо вираз кубічного сплайна на кожному частковому відрізку через похили:

$$S_3(x) = y_i + (x - x_i)m_i + \frac{(x - x_i)^2}{h_i}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - m_i\right) - \frac{(x - x_i)^2}{h_i}(x_{i+1} - x) \cdot$$
$$\cdot \left(m_{i+1} + m_i - 2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right), x \in \left[x_i ; x_{i+1}\right] \; (i = 0,1,...N-1). \tag{5}$$

Після згрупування коефіцієнтів при невідомих значеннях похилів, можна Отримати представлення сплайна в іншій формі:

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2 \cdot (x - x_i)}{h_i^2} m_i - \frac{(x - x_i)^2 \cdot (x_{i+1} - x)}{h_i^2} m_{i+1} +$$
$$+ \frac{(x_{i+1} - x)^2 \cdot \left(2\left(x - x_i\right) + h_i\right)}{h_i^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2 \cdot \left(2\left(x_{i+1} - x\right) + h_i\right)}{h_i^3} y_{i+1}. \tag{6}$$

З формули (5) можна знайти вираз для другої похідної кубічного сплайна:

$$S_3{}''(x) = \frac{2}{h_i} \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - m_i\right) - \left(\frac{2\left(x_{i+1} - x\right)}{h_i^2} - \frac{4\left(x - x_i\right)}{h_i^2}\right) \cdot \left(m_i + m_{i-1} - 2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right) =$$
$$= (y_{i+1} - y_i) \cdot \frac{6 - 12 \cdot t}{h_i^2} + m_i \cdot \frac{\left(-4 + 6 \cdot t\right)}{h_i} + m_{i+1} \cdot \frac{\left(-2 + 6 \cdot t\right)}{h_i}, \tag{7}$$

де $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$, $x \in \left[x_i ; x_{i+1}\right] \; (i = 0,1,2,..., N-1)$.

Враховуючи в (7) $x = x_i$, можна обчислити праву односторонню похідну другого порядку у вузлі x_i:

$$S_3''(x_i+0) = -\frac{4\cdot m_i}{h_i} - \frac{2\cdot m_{i+1}}{h_i} + 6\cdot\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}.$$

Замінивши в (7) індекс i на i-1, можна обчислити ліву односторонню похідну другого порядку у вузлі x_i:

$$S_3''(x_i-0) = \frac{2\cdot m_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{4\cdot m_i}{h_{i-1}} - 6\cdot\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}.$$

З умови безперервності другої похідної кубічного сплайна у вузлах x_i вважаємо:

$$S_3''(x_i-0) = S_3''(x_i+0),\ (i=1,2,...N-1),$$

що еквівалентно системі лінійних алгебраїчних рівнянь відносно нахилів:

$$\beta_i\cdot m_{i-1} + 2\cdot m_i + \alpha_i\cdot m_{i+1} = c_i,\ (i=1,2,...N-1), \tag{8}$$

де

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_i+h_{i-1}},\quad \beta_i = \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}} = 1-\alpha_i,\quad c_i = 3\cdot\left(\alpha_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} + \beta_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right).$$

До рівняння (7) необхідно додати ті два рівняння, яких не вистачає відповідно до заданих краєвих умов типу:

$$1)\ m_0 = f'(a), m_N = f'(b); \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &2)\ 2\cdot m_0 + m_1 = 3\cdot\frac{y_1-y_0}{h_0} - \frac{h_0}{2}\cdot f''(a),\\ &m_{N-1} + 2\cdot m_N = 3\cdot\frac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}} + \frac{h_{N-1}}{2}\cdot f''(b);\end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &3)\ 2\cdot m_1 + \alpha_1\cdot m_2 + \beta_1\cdot m_N = c_1,\\ &\alpha_N\cdot m_1 + \beta_N\cdot m_{N-1} + 2\cdot m_N = c_N,\end{aligned}\right. \tag{11}$$

де з умови періодичності

$$y_0 = y_N, y_1 = y_{N+1}, m_0 = m_N, m_1 = m_{N+1}, h_N = h_0,$$

в системі рівнянь (8) можна вважати $i = 1, 2, ..., N\text{-}1$;

$$4) \left(1 + \frac{h_0}{h_1}\right) \cdot m_1 + \frac{h_0}{h_1} \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot c_1 + 2 \cdot \frac{h_0}{h_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{h_1}, \tag{12}$$

$$\frac{h_{N-1}}{h_{N-2}} \cdot m_{N-2} + \left(1 + \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}}\right) \cdot m_{N-1} = \frac{1}{3} \cdot c_{N-1} + 2 \cdot \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}} \cdot \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-2}},$$

Для краєвих умов всіх типів система алгебраїчних рівнянь (8), доповнена відповідно рівняннями (9) – (12), має матрицю з домінуючою діагоналлю, тому існує єдине рішення, яке може бути отримане методом прогонки.

Для обчислення значень сплайна $S_3(x)$ в точці $x \in [a;b]$ при відомих значення похилів $(m_i = 0,1,...N)$, можна скористатися формулою (5), перетвореною до вигляду, зручного для обчислень:

$$S_3(t) = y_i + (x - x_i) \cdot \left(m_i + t \cdot \left(B + A \cdot t\right)\right), \tag{13}$$

де

$$A = -2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + m_{i+1} + m_i;$$

$$B = -A + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - m_i; \qquad \text{t} = \frac{x - x_i}{h_i}.$$

m_i - похил в довільній точці поздовжнього профілю.

4) глобальний спосіб задання поздовжнього профілю кубічним сплайном через моменти [5].

Зважаючи на неперервність і лінійність другої похідної функції $S(x)$ на кожному відтинку сітки $\left[x_i; x_{i+1}\right]$, $(i = 1, 2, ..., \text{n})$ можна записати при $x_{i-1} \le x \le x_i$:

$$S(x)'' = m_{i-1} \cdot \frac{x_i - x}{h_i} + m_i \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{14}$$

де $h_i = x_i - x_{i+1}$, $m_k = S(x_k)''$. Проінтегрувавши двічі обидві частини рівності (14), можна отримати:

$$S(x) = m_{i-1} \cdot \frac{\left(x_i - x\right)^3}{6 \cdot h_i} + m_i \cdot \frac{\left(x - x_{i-1}\right)^3}{6 \cdot h_i} + A_i \cdot \frac{x_i - x}{h_i} + B_i \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{15}$$

де A_i і B_i – деякі константи інтегрування. Вони обчислюються з умови $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$, $S(x) = f_i$. Якщо підставити $x = x_i$ і $x = x_{i-1}$ в (15), то

$$m_i \cdot \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i$$

$$m_{i-1} \cdot \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_{i-1}$$

Остаточно виходить, що

$$S(x) = m_{i-1} \cdot \frac{(x_i - x)^3}{6 \cdot h_i} + m_i \cdot \frac{(x - x_{i-1})^3}{6 \cdot h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{m_{i-1} \cdot h_i^2}{6} \right) \cdot \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{m_i \cdot h_i^2}{6} \right) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{16}$$

$$S'(x) = -m_{i-1} \cdot \frac{(x_i - x)^2}{2 \cdot h_i} + m_i \cdot \frac{(x - x_{i-1})^2}{2 \cdot h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6} \cdot h_i \tag{17}$$

З умови неперервності $S'(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ отримаємо $n\text{-}1$ рівнянь

$$\frac{h_i}{6} \cdot m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} \cdot m_i + \frac{h_{i+1}}{6} \cdot m_{i+1} = \frac{f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \tag{18}$$

Для того щоб визначити невідомі m_1, m_2, … , m_{n-1}, необхідно визначити алгебраїчну систему рівнянь. Зробивши деякі позначення, можна записати рівність (18) у вигляді зручному для програмування:

$$h = h_i + l \cdot \Lambda + h_i \cdot \Delta - M_{i+1} \cdot \left(\Lambda - \Lambda^3 \right) - M_i \cdot \left(\Delta - \Delta^3 \right) \tag{19}$$

де h_i, h_{i+1} – природні глибини русла в початковий момент руслових деформацій у вузлових точках сплайну i та $i+1$;

M_i, M_{i+1} – моменти сплайну у вузлових точках;

$\Delta = 1 - \Lambda$; $\quad \Lambda = \dfrac{l - l_i}{\lambda_i}$;

λ – відстань між вузловими точками поздовжнього профілю дна русла.

Сплайни володіють гарними апроксимативними властивостями. Інтерполяційні сплайни в раді задач забезпечують мінімально можливу похибку наближення на даному класі функцій серед всіх многочленів фіксованого ступеня.

Обираючи з двох способів апроксимації поздовжнього профілю дна русла, доцільніше застосовувати кубічний сплайн в похилах (13). Оскільки, при застосуванні кубічного сплайну через моменти (19), необхідно вирішувати складну систему алгебраїчних рівнянь для пошуку моментів сплайну. Крім того, не завжди є повна вихідна інформація для прогнозування руслових переформувань, що значно ускладнює обчислювальний процес. Спосіб задання кубічного сплайну в похилах в системі багаторічного прогнозування величини загального розмиву дає можливість вирішенню багатьох задач, які виникають в процесі проектування різних гідротехнічних споруд.

Насамкінець треба зауважити, що апроксимація поздовжнього профілю дна кубічними сплайнами буде необхідним за будь-якої розрахункової схеми при врахуванні природних руслових переформувань, що відбуваються кожного паводку до і після затоплення заплав.

Перелік посилань

1. ДБН В.2.3-22:2009 Мости та труби. Основні вимоги проектування. – К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 367 с.

2. Ткачук С.Г. Прогнозування руслових деформацій на мостових переходах. Частина 3 і 4. Навчальний посібник. К.:, 2004. – 98 с.

3. Ткачук С.Г., Корецький А.С. Аналітична методика багаторічного прогнозування загального розмиву на мостових переходах. Сб. «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво» № 70, Київ, НТУ, 2004.

4. Барановская Г.Г., Любченко И.Н. Микрокалькуляторы в курсе высшей математики: Практикум. – К.: Вища школа, 1987. – 288 с.

5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.