

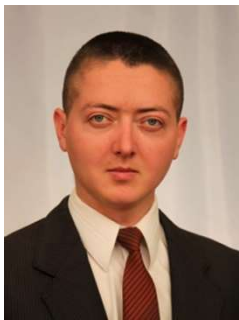
**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАЛОЦИКЛОВОЇ ВТОМИ БЕТОНУ
ІЗ ЗАЛУЧЕННЯМ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ПОЛОЖЕНЬ**

**MATHEMATICAL MODELLING OF LOW-CYCLIC FATIGUE OF CONCRETE
WITH ATTRACTION OF THE ENERGY PRINSIPLES**



Крусь Юрій Олексійович, Національний університет водного господарства та природокористування (м. Рівне), кандидат технічних наук, доцент, кафедра автомобільних доріг, основ і фундаментів, доцент, alkrous@ukr.net, +38 (096) 9643443

<https://orcid.org/0000-0001-5271-7765>



Крусь Олексій Юрійович, Національний університет водного господарства та природокористування (м. Рівне), інженер науково-дослідного виробничого бізнес-центру науково-дослідної частини, alexkrusexp@gmail.com, +38 (096) 9190551

<https://orcid.org/0000-0002-1989-0328>



Каськів Володимир Іванович, кандидат технічних наук, доцент, заступник директора з наукової роботи ДП "ДерждорНДІ", e-mail: vi_kas@ukr.net, тел. +380504458544, Україна, м. Київ, просп. Перемоги, 57

<https://orcid.org/0000-0002-8074-6798>



Гасвський Богдан Володимирович, Національний університет водного господарства та природокористування (м. Рівне), студент навчально-наукового інституту будівництва та архітектури, спеціалізація "Автомобільні дороги та аеродроми", nort22@ukr.net, +38 (096) 2615879

<https://orcid.org/0000-0002-0778-7673>

Анотація: Проаналізовані результати численних експериментальних досліджень із вивчення силових впливів на будівельні конструкції, будівлі та споруди. Доведено, що переважна більшість зовнішніх навантажень монотонно змінюються або циклічно повторюються, тобто мають змінний ха-

рактар. Виявлено, що дія високорівневих циклічних навантажень (як правило, із малою кількістю повторювань) може бути причиною специфічного деформування й руйнування матеріалів і конструкцій. Наведені приклади зі світової статистики аварій у будівництві, яка фіксує багаточисельні випадки, коли високорівневі малоциклові силові впливи призводять до неочікуваного й стрімкого втомного руйнування будівель і споруд, почасти – із трагічними наслідками. Разом із тим, факт наявності малоциклових навантажень високої інтенсивності та їхнього впливу на роботу матеріалів і конструкцій жодним чином не відображений у чинних нормативних документах.

У зв'язку з цим проведені експериментальні дослідження роботи дрібнозернистого (цементно-піщаного) і крупнозернистого (на звичайних заповнювачах) бетонів при близьких до руйнівних високих рівнях статичних малоциклових навантажувальних центральним стисненням. Розроблений ефективний метод визначення малоциклової втоми та прогнозування циклічної довговічності бетону, що базується на відомих енергетичних положеннях (гіпотезах, критеріях і співвідношеннях). Вірогідність виявлених залежностей і зроблених висновків підтверджується прийнятною збіжністю дослідних і розрахункових даних.

Ключові слова: бетон, малоциклові навантаження, малоциклова втома, циклічна довговічність, енергетичні положення (гіпотези, критерії та співвідношення).

Вступ

У реальних умовах практично всі будівельні конструкції, будівлі та споруди експлуатуються в умовах повторних навантажувальних із випадковим або періодичним чергуванням завантажувальних і розвантажувальних. Серед них можна вирізнити так звані *малоциклові навантаження високого рівня* (із максимальними значеннями, близькими до руйнівних при стандартному одноразовому статичному навантаженні) із кількістю повторювань за гарантований термін служби будівлі або споруди десятки, сотні, а деколи й тисячі разів (в усіх випадках багато менше, ніж регламентовані будівельними нормами для багатоциклових навантажень 2×10^6 циклів), які за своїми значеннями перевищують навантаження при звичному використанні матеріалу, елемента або конструкції і можуть бути охарактеризовані як перенавантаження. До таких можуть бути віднесені як навантаження природного походження (сейсмічні, снігові, вітрові, хвильові, льодові та ін.), так і деякі технологічні (транспортні при несанкціонованих перетинах великоваговими вантажами мостових споруд з обмеженою вантажопідйомністю та водоперепускних труб і тунелів під насипами доріг, у силосах елеваторів для збереження сипких матеріалів під час їхнього обвалу, на перекриття від ваги людей і ремонтних матеріалів у зонах обслуговування й ремонту обладнання, від ваги складованих матеріалів тощо).

Власні експериментальний досвід [1-5], а також дослідження інших авторів [6-13] засвідчують, що дія високорівневих малоциклових навантажень спричиняє специфічне деформування нелінійно деформованих матеріалів, кінцевим результатом якого є *малоциклова втома* (далі – МЦВ) – явище настання граничного стану (порушення суцільності) від розміцнення матеріалу при прогресуючому зростанні пластичної деформації при її циклічній зміні. Що стосується будівельних об'єктів, то дія зазначених навантажень може призвести не лише до точкових втомних пошкоджень у вигляді, наприклад, розповсюдження неприпустимих втомних тріщин, а й почасти – до більш серйозних наслідків, аж до аварії вірно запроектованих згідно з чинними нормами окремих конструкцій та будівель і споруд уцілому.

Доречно звернімося до світової статистика аварій у будівництві, яка фіксує багаточисельні випадки, коли високорівневі малоциклові силові впливи призводять до неочікуваного й стрімкого втомного руйнування. Назвемо лише деякі випадки повного руйнування будівель і споруд, що мали місце в останні роки, найширше висвітлювались у засобах масової інформації та призвели до найтрагічніших наслідків. Це – обвалення басейну “Дельфін” у м. Чусовому Пермського краю Росії 4.12.2005 р. (14 загиблих і 18 осіб, які отримали тілесні ушкодження); спортивно-розважального комплексу “Трансвааль-парк” (28 людей загинули та 113 отримали поранення різного ступеню) і Басманного ринку (загинули 68 осіб, отримали поранення – 39) у Москві (Росія) відповідно 14.02.2004 р. і 23.02.2006 р.; “Льодового палацу” у німецькому Бад-Райхенгаллі (Баварія) 4.01.2006 р. (14 загиблих і 34 важко поранених); торгово-виставкового центру у польському місті Катовіце 28.01.2006 р. (кількість жертв – 67, поранення отримали 141 людина); торгового центру Махіма у Ризі 21.11.2013 р. (54 загиблих, 40 поранених і скалічених); 8-поверхової будівлі Рана-Плаза, у якій розміщались п'ять цехів текстильної фабрики, банк і торгові точки, у м. Савар (пригороді столиці Бангладеш – Даккі) 24.04.2013 р. (загиблих налічується 1127 осіб, поранених – близько 2500). Принагідно відзначимо недавнє часткове обвалення Шулявського залізобетонного шляхопроводу в м. Києві, що відбулось 27 лютого 2017р.

(на щастя – без жертв), яке, на думку фахівців, як раз і є класичним прикладом аварії внаслідок втомного руйнування транспортної споруди, що піддавалась дії вище згаданих високорівневих малоциклових навантажень.

Усе сказане свідчить про важливість і актуальність проблеми деформування й руйнування бетону в умовах зазначених силових впливів, яка потребує всебічного й ретельного вивчення та систематизації задля можливості її реалізації у розрахунковій практиці.

Наразі науковцями накопичені експериментальні дані, що дозволяють визначати МЦВ деяких бетонів, зокрема, дрібнозернистого [1,4], важкого на звичайних заповнювачах [1,4,9,11-13], важкого із дрібним заповнювачем із відходів гірничозбагачувального виробництва [10], керамзитобетону [12]. Але, по-перше – усі відомі залежності мають феноменологічний характер і можуть бути використані лише для конкретного матеріалу й певного режиму його навантажування; по-друге – охопити дослідженнями з подібним методологічним підходом усі матеріали для узагальнення даних видається технічно складною процедурою, якій супутня низка несприятливих факторів, найсуттєвіший з яких – необхідність проведення великої кількості тривалих і кропітких експериментів.

Мета та методи. На фоні вище окреслених труднощів виникає потреба в розробці універсального апарату визначення межі МЦВ та прогнозування циклічної довговічності будь-якого нелінійно деформівного будівельного матеріалу із залученням енергетичних положень (гіпотез, критеріїв і співвідношень), які частіше за все надають можливість у найбільш ефективний спосіб одержати результат із мінімальними витратами розрахункової праці та у найкоротший термін.

Досвід використання енергетичних підходів, базованих на законі збереження й перетворення енергії, у теорії опору бетону й залізобетону відомий. Так, наприклад, плити, обперті по контуру, розраховують методом граничної рівноваги на основі балансу енергії. Розглядаючи у граничному стані плиту як систему плоских ланок, що з'єднані між собою лінійними пластичними шарнірами, прирівнюють роботу зовнішніх і внутрішніх сил [14]. Відомі й інші випадки ефективного застосування енергетичних положень, зокрема, при трансформуванні отриманих за стандартними методиками діаграм деформування бетону та арматурної сталі, коли необхідно врахувати характер навантаження (його інтенсивність, форму й швидкість прикладання, тривалість дії, режимність та ін.) [15-18], оцінюванні умов розвитку тріщин у механіці руйнування будівельних матеріалів і конструкцій [19-20], складанні достатньо простих і адекватних фізичним процесам математичних моделей напружено-деформованого стану перерізів зігнутих залізобетонних елементів на довільних стадіях їхньої роботи та при руйнуванні [21-23].

Разом із тим, стосовно розробки методів розрахунку міцності бетону при повторних малоциклових статичних впливах слід відзначити вкрай недостатню міру залучення енергетичних положень. Навіть чи не єдиною наразі з досліджуваної проблеми наукову працю [10] через низку причин не можна вважати остаточно завершеною. Основна з них – присутність у кінцевій формулі для визначення циклічної довговічності бетону n_{cyc} констант $\varepsilon_{BR,cyc}$, $\alpha_{cyc}=1/\nu_{BR,cyc}$ і $\delta_{cyc}=\alpha_{cyc}/(1+\alpha_{cyc})$, які характеризують специфічні особливості деформування бетону в умовах малоповторювальних навантажень. Зазначена вада позбавляє бажаної ефективності практичне застосування запропонованого авторами [10] енергетичного підходу, який первісно за своїм оригінальним задумом передбачає відомість про механічні характеристики матеріалу лише при одноразовому статичному навантажуванні до руйнування.

У представленій статті розроблений вільний від подібних недоліків власний енергетичний апарат визначення межі МЦВ та прогнозування циклічної довговічності бетону як основного конструкційного будівельного матеріалу.

Результати та пояснення. Серед усіх відомих із літератури [6-8] аналітичних співвідношень найбільш часто для математичного описання кривих МЦВ матеріалів (так званих “діаграм Веллера”; рис. 1) із яскраво вирізненими ділянками виключно пружного й пружно-пластичного деформувань при “м’якому” режимі навантажування (тобто при незмінній у проміжку часу dt швидкості V_σ приросту напружень $d\sigma$, коли $V_\sigma=d\sigma/dt=const$) застосовують емпіричну формулу Л.Коффіна-С.Менсона, яка, зокрема, для м’яких сталей і алюмінієвих сплавів, що зазнають осьового розтягнення, має такий вигляд:

$$(\sigma_{s,cyc} - \sigma_{s,y}) \cdot n_{cyc}^\delta = D, \quad (1)$$

де $\sigma_{s,cyc} - \sigma_{s,y} = \sigma_a$ – діапазон напружень, у межах якого відбувається пластичне деформування матеріалу, тобто зона так званих значних пластичних деформацій, що мають місце при $\sigma_{s,y} < \sigma_{s,cyc} < R_{s,u}$; $\sigma_{s,cyc} = \sigma_{s,max}$ – максимальне напруження циклу або інакше – значення абсолютної межі МЦВ; $\sigma_{s,y}$ – напруження, що обмежує пружну роботу матеріалу, або інакше – межа його текучості; $R_{s,u}$ – межа міцності матеріалу; n_{cyc} – циклічна довговічність; δ і D – сталі для конкретного матеріалу характеристики, які визначають

його пластичні властивості та встановлюються із дослідів на руйнування при одноразовому монотонному навантажуванні.

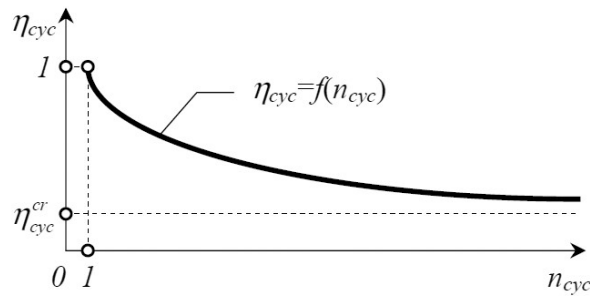


Рисунок 1 – Схема кривої малоциклової втоми (“діаграма Веллера”) нелінійно деформівного матеріалу в координатних осях $\eta_{cyc} \sim n_{cyc}$

Figure 1 – The diagram of the low-cyclic fatigue curve (“the Weller diagram”) of a nonlinearly deformable material in the coordinate axes $\eta_{cyc} \sim n_{cyc}$

Далі розглядатимемо бетон, що піддається м’якорезимному центральному стисненню в умовах знакосталих малоповторювальних циклічних навантажувальних високих рівнів аж до руйнування. Апроксимацію відповідної кривої МЦВ здійснимо дробовою раціональною функцією вигляду

$$\eta_{b,cyc} = 1 - p \frac{n_{cyc}^q - 1}{n_{cyc}^q}, \quad (2)$$

де $\eta_{b,cyc} = \sigma_{b,cyc} / R_b$ – відносний рівень МЦВ бетону; R_b – межа міцності бетону при одноразовому статичному стисненні (так звана “призмova міцність”); p і q – сталі коефіцієнти, які характеризують нелінійні властивості бетону та визначаються з умов мінімуму квадратичних абсолютних відхилень дослідних точок від теоретичної кривої.

Надання фізичного змісту параметра “ p ” у виразі (2) не являє труднощів. Якщо взяти до уваги раніше встановлений у [4] факт наявності в діаграмі Веллера “ $\eta_{b,cyc} \sim n_{cyc}$ ” так званого “критичного” відносного рівня напружень $\eta_{b,cyc}^{cr}$, перевищення якого спричиняє втомне руйнування матеріалу, а також виконати деякі алгебричні перетворення, що пов’язані з виконанням апроксимативною залежністю (2) граничних умов, згідно з якими при $n_{cyc} = 1$ маємо $\eta_{b,cyc} = 1$, а при $n_{cyc} \rightarrow \infty$ – $\eta_{b,cyc} \rightarrow \eta_{b,cyc}^{cr}$, то розглядувану формулу можна записати дещо інакше:

$$\eta_{b,cyc} = 1 - \left(1 - \eta_{b,cyc}^{cr}\right) \frac{n_{cyc}^q - 1}{n_{cyc}^q}. \quad (3)$$

З урахуванням базованих на результатах власних експериментально-теоретичних досліджень висновків [4] і висловлювань інших авторів [9,12,13,24-28] про відповідність граничної відносної межі МЦВ бетону $\eta_{b,cyc}^{cr}$ верхньому відносному рівню його мікротріщиноутворення $\eta_{b,crc}^{top}$, остаточний вираз для сталого коефіцієнта “ p ” у формулі (2) набуває такого вигляду:

$$p = 1 - \eta_{b,cyc}^{cr} = 1 - \eta_{b,crc}^{top}, \quad (4)$$

тобто

$$\eta_{b,cyc}^{cr} \equiv \eta_{b,crc}^{top}. \quad (5)$$

Залежно від виду застосованого функціонального зв’язку між напруженнями σ_b і повними відносними деформаціями ε_b (див. вирази (18) або (26) у раніше опублікованій статті [29]):

$$\sigma_b = R_b (\varepsilon_b / \varepsilon_{bR})^{V_{bR}} = R_b \eta_\varepsilon^{V_{bR}} \quad (6)$$

або

$$\sigma_b = R_b \frac{\varepsilon_b}{(1 - \nu_{bR})\varepsilon_b + \nu_{bR}\varepsilon_{bR}} = \frac{R_b \eta_\varepsilon}{(1 - \nu_{bR})\eta_\varepsilon + \nu_{bR}} \quad (7)$$

(тут $\eta_\varepsilon = \varepsilon_b / \varepsilon_{bR}$) для визначення відносного рівня напружень $\eta_{b,cyc}^{cr} = \eta_{b,crc}^{top}$ можуть бути використані одержані в [30] співвідношення (див. відповідно вирази (11) і (2) у зазначеній публікації [30]):

$$\eta_{b,cyc}^{cr} = \eta_{b,crc}^{top} = \left(\frac{2\nu_{b,l;R} \cdot \varepsilon_{b,tr;R}}{\nu_{b,tr;R} \cdot \varepsilon_{b,l;R}} \right)^{\frac{\nu_{b,tr;R}\nu_{b,l;R}}{\nu_{b,tr;R} - \nu_{b,l;R}}} \quad (8)$$

$$\text{або } \eta_{b,cyc}^{cr} = \eta_{b,crc}^{top} = \frac{\sqrt{\nu_{b,l;R} \varepsilon_{b,l;R}} - \sqrt{2\nu_{b,tr;R} \varepsilon_{b,tr;R}}}{(1 - \nu_{b,tr;R})\sqrt{\nu_{b,l;R} \varepsilon_{b,l;R}} - (1 - \nu_{b,l;R})\sqrt{2\nu_{b,tr;R} \varepsilon_{b,tr;R}}} \quad (9)$$

(тут позначення ті ж самі, що й у наукових працях [29,30]).

З урахуванням (5) перепишемо формулу (3) в абсолютних напруженнях:

$$\sigma_{b,cyc} = R_b - \left(R_b - \sigma_{b,cyc}^{cr} \right) \frac{n_{cyc}^q - 1}{n_{cyc}^q} = R_b - \left(R_b - \sigma_{b,crc}^{top} \right) \frac{n_{cyc}^q - 1}{n_{cyc}^q}, \quad (10)$$

де $\sigma_{b,cyc}^{cr}$ – абсолютна межа МЦВ бетону при центральному стисненні; $R_{b,crc}^{top} = \eta_{b,crc}^{top} R_b$ – напруження в стисненому бетоні, що відповідає верхній границі мікротріщиноутворення в ньому.

Залежність (10) може бути приведена до структури формули Л.Коффіна-С.Менсона (1), маючи такий вигляд:

$$\left(\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr} \right) \cdot n_{cyc}^q = D, \quad (11) \quad \text{де} \quad D = R_b - \sigma_{b,crc}^{top}. \quad (12).$$

Порівняння співвідношень (11) і (1) засвідчує про очевидну тотожність

$$q \equiv \delta. \quad (13)$$

Надамо фізичного змісту сталому коефіцієнту “q”, який також входить до складу виразів (2), (3) і (10). Супроводжуємо цю процедуру оцінкою явища МЦВ із позицій енергетичної гіпотези Д.Мартіна [6,31,32] і пропозицій до неї Г.Хелфорда і Дж.Морроу [33], згідно з якими МЦВ (вичерпання циклічної довговічності) настає у випадку досягнення сумарною площею петлі гістерезису, пов’язаної з ділянкою так званих суттєвих пластичних деформацій (для бетону цій області відповідають стискаючі напруження $\sigma_{b,cyc}^{cr} = \sigma_{b,crc}^{top} < \sigma_{b,cyc} < R_b$; прим. авт.), критичної величини, вирахованої за значенням розсіяної в одиниці об’єму матеріалу потенціальної енергії при одноразовому статичному завантажуванні до руйнування. Сформульованій гіпотезі відповідає математичний запис:

$$\sum_{k=1}^{n_{cyc}} W_k = n_{cyc} \int_0^{\varepsilon_{pl,max}} \sigma_a d\varepsilon_{pl} = W^*, \quad (14)$$

де n_{cyc} – кількість циклів навантажувань до руйнування (циклічна довговічність); k – біжуча кількість циклів навантажувань; W_k – енергія, яка розсіюється в одиниці об’єму матеріалу на k -му циклі або інакше – енергія пластичного гістерезису за один k -й цикл; W^* – критична енергія руйнування.

Скористаємось запропонованою Р.Ганстоком [34] формулою повної енергії, необхідної для руйнування матеріалу після n_{cyc} циклів навантажувань, у вигляді (див. рис. 2,а):

$$\sum_{k=1}^{n_{cyc}} W_k = A + B \cdot n_{cyc}. \quad (15)$$

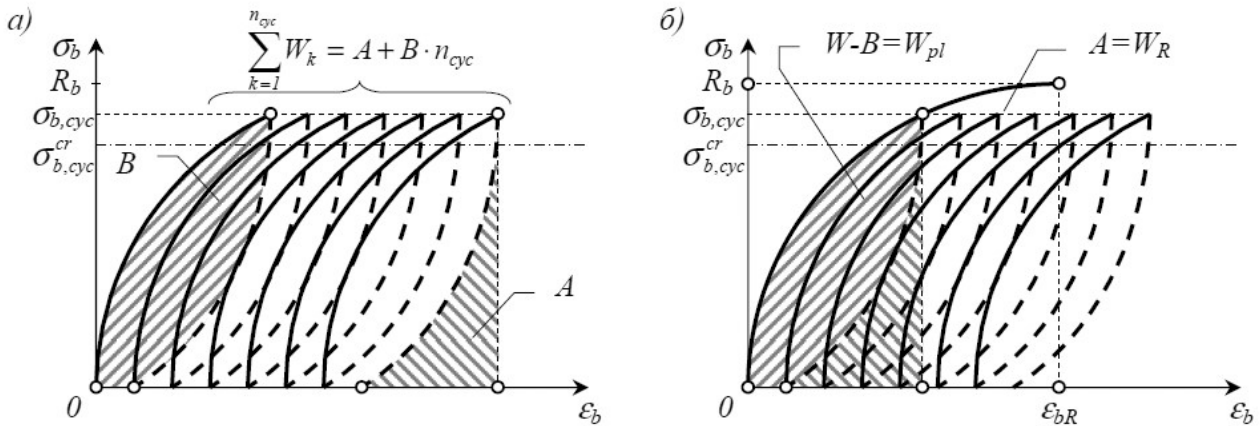


Рисунок 2 – Графічне тлумачення формули Р.Ганстока (15) (а) і залежності (17) (б)
 Figure 2 – Graphical interpretation of the R.F.Hanstock’s formula (15) and of the dependence (17)

Оскільки класична теорія пружності (включаючи й нелінійну пружність) не розрізняє випадків першого або будь-якого наступного навантажувань [6], то при $W_k=W=const$ співвідношення (15) набуває дещо іншої форми

$$\sum_{k=1}^{n_{cyc}} W_k - B \cdot n_{cyc} = (W - B) \cdot n_{cyc} = A \quad (16)$$

з іншим фізичним змістом (рис. 2,б), засвідчуючи, що константа “A” характеризує граничну (тобто повну) енергію W_R , витрачену на руйнування при одноразовому завантажуванні до руйнування, а стала “B” визначає енергію, що йде на відновлення, тобто зменшення ступеня накопичених пошкоджень. Такі розмірковування дають підставу тлумачити формулу (16) наступним чином:

$$W_{pl} \cdot n_{cyc} = W_R \cdot n_{cyc} \quad (17)$$

Як бачимо з рис. 2,б, визначення питомої енергії $W-B=W_{pl}$, дисипованої одиницею об’єму за один цикл повторного навантажування, передбачає знання залежності напружень σ_b від пластичних деформацій $\varepsilon_{b,pl}$. Якщо скористатись отриманим раніше власним законом деформування бетону при центральному стисненні у “м’якому” силовому режимі (див. формулу (36) у публікації [35])

$$\sigma_b = R_b \left[\frac{\varepsilon_{b,pl}}{(1 - \nu_{bR}) \varepsilon_{bR}} \right]^{\nu_{bR}/(1 + \nu_{bR})} = \frac{\nu_{bR} E_{b0} \varepsilon_{bR}^{1/(1 + \nu_{bR})}}{(1 - \nu_{bR})^{\nu_{bR}/(1 + \nu_{bR})}} \varepsilon_{b,pl}^{\nu_{bR}/(1 + \nu_{bR})} \quad (18)$$

або інакше

$$\sigma_b = \beta_b \varepsilon_{b,pl}^{\alpha_b} \quad (19)$$

де

$$\beta_b = \frac{\nu_{bR} E_{b0} \varepsilon_{bR}^{1/(1 + \nu_{bR})}}{(1 - \nu_{bR})^{\nu_{bR}/(1 + \nu_{bR})}} \quad (20) \quad \text{і} \quad \alpha_b = \frac{\nu_{bR}}{1 + \nu_{bR}} \quad (21)$$

(тут ν_{bR} , E_{b0} , ε_{bR} – сталі параметри нелінійного деформування бетону при його одноразовому завантажуванні до руйнування), а також прийняти до уваги дослідження авторів [6,36], що свідчать про відповідальність за порушення циклічної міцності накопичених пластичних деформацій у діапазоні напружень $\sigma_{b,cyc}^{cr} \dots R_u$ (тут R_u – межа міцності матеріалу; див. формулу (1) і пояснення до неї), доходимо такого висновку: при визначенні енергії W_{pl} , дисипованої одиницею об’єму бетону за один цикл повторного навантажування, функціональний зв’язок $\sigma_b = f(\varepsilon_{b,pl})$ для ділянки $\varepsilon_{b,cyc}^{cr} \dots \varepsilon_{bR}$ суттєвих пластичних деформацій в області напружень $\sigma_{b,cyc}^{cr} \dots R_b$ повинен мати вигляд (див. рис. 3):

$$\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr} = \beta_b \left(\varepsilon_{b,pl;cyc} - \varepsilon_{b,pl;cyc}^{cr} \right)^{\alpha_b} = \beta_b \left(\Delta \varepsilon_{b,pl;cyc} \right)^{\alpha_b} \quad (22)$$

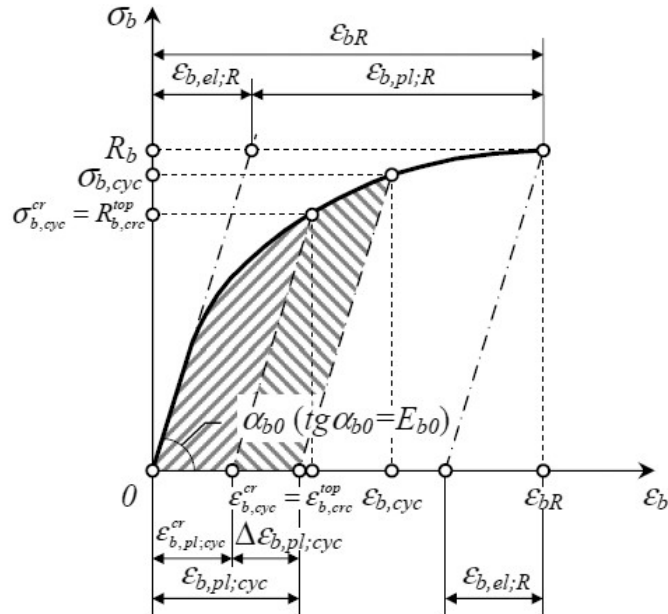


Рисунок 3 – Діаграма деформування бетону при його одноразовому завантажуванні центральним стиском до руйнування у “м’якому” силовому режимі

Figure 3 – The diagram of concrete deforming at its single loading by the central compression before destruction in the “soft” force mode

В оберненому записі, тобто у математичній формі $\Delta \varepsilon_{b,pl;cyc} = f(\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr})$, співвідношення (22) виглядатиме так:

$$\Delta \varepsilon_{b,pl;cyc} = \varepsilon_{b,pl;cyc} - \varepsilon_{b,pl;cyc}^{cr} = \left(\frac{\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr}}{\beta_b} \right)^{1/\alpha_b} \quad (23)$$

Отже, прийнявши до опрацювання залежність (22), отримаємо такий вираз для визначення питомої енергії W_{pl} :

$$\begin{aligned} W_{pl} &= \int_0^{\varepsilon_{b,pl;cyc}} \sigma_b d\varepsilon_{b,pl} - \int_0^{\varepsilon_{b,pl;cyc}^{cr}} \sigma_b d\varepsilon_{b,pl} = \int_0^{\varepsilon_{b,pl;cyc}} \beta_b \varepsilon_{b,pl}^{\alpha_b} d\varepsilon_{b,pl} - \int_0^{\varepsilon_{b,pl;cyc}^{cr}} \beta_b \varepsilon_{b,pl}^{\alpha_b} d\varepsilon_{b,pl} = \\ &= \beta_b \frac{(\varepsilon_{b,pl;cyc} - \varepsilon_{b,pl;cyc}^{cr})^{\alpha_b + 1}}{\alpha_b + 1} \end{aligned} \quad (24)$$

або з урахуванням (23) –

$$W_{pl} = \frac{(\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr})^{(\alpha_b + 1)/\alpha_b}}{\beta_b^{1/\alpha_b} (\alpha_b + 1)} \quad (25)$$

Після підстановки (25) у (17) і подальших алгебричних перетворень матимемо

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr})^{(\alpha_b + 1)/\alpha_b}}{\beta_b^{1/\alpha_b} (\alpha_b + 1)} \cdot n_{cyc} &= W_R; \\ (\sigma_{b,cyc} - \sigma_{b,cyc}^{cr}) \cdot n_{cyc}^{\alpha_b/(\alpha_b + 1)} &= \left[W_R \beta_b^{1/\alpha_b} (\alpha_b + 1) \right]^{\alpha_b/(\alpha_b + 1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Як бачимо, вираз (26) структурно ідентичний формулі Л.Коффіна-С.Менсона (1) і трансформованому запису (11) запропонованої власної апроксимативної залежності МЦВ бетону (3). При цьому

$$D = \left[W_R \beta_b^{1/\alpha_b} (\alpha_b + 1) \right]^{\alpha_b / (\alpha_b + 1)} \quad (27) \quad \text{і} \quad \delta = q = \frac{\alpha_b}{\alpha_b + 1}. \quad (28)$$

Таким чином, з урахуванням (21) фізичний зміст сталого коефіцієнта $q \equiv \delta$ (див. тотожність (13)) у співвідношеннях (2), (3) і (10) набуває формалізованого вигляду

$$q = \frac{\alpha_b}{\alpha_b + 1} = \frac{v_{bR}}{1 + 2v_{bR}}. \quad (29)$$

Підставляючи (29) у залежність (3) та беручи до уваги співвідношення (5), отримаємо остаточний вираз для визначення відносного рівня МЦВ бетону, а саме

$$\eta_{b,cyc} = 1 - \left(1 - \eta_{b,crc}^{top} \right) \frac{n_{cyc}^{v_{bR}/(1+2v_{bR})} - 1}{n_{b,crc}^{v_{bR}/(1+2v_{bR})}}. \quad (30)$$

Обернена по відношенню до (30) залежність у формі $n_{cyc} = f(\eta_{b,cyc})$ надає можливість прогнозувати циклічну довговічність бетону n_{cyc} і має вигляд

$$n_{cyc} = \left[\frac{1 - \eta_{b,crc}^{top}}{\eta_{b,cyc} - \eta_{b,crc}^{top}} \right]^{(1+2v_{bR})/v_{bR}}. \quad (31)$$

Висновки та рекомендації. Оцінку адекватності залежності (31) з урахуванням співвідношення для обчислення присутнього у ній сталого параметра $\eta_{b,crc}^{top}$ (див. вираз (9)) здійснювали за експериментальними даними, отриманими при випробуваннях окремих серій призм із дрібнозернистого цементно-піщаного бетону ДЗБ-І,ІІ (17 шт.), крупнозернистого бетону на звичайних заповнювачах КЗБ-І-2 (16 шт.) та крупнозернистого бетону на звичайних заповнювачах із пластифікуючою добавкою “Дофен” КЗБД-ІІІ (16 шт.) високими рівнями повторних малоциклових статичних навантажувальних центрального стиснення із діапазоном варіювання максимальних рівнів напружень $\eta_{b,cyc} = 0,78 \dots 0,96$ і незмінною характеристикою циклів $\rho_\sigma = \sigma_{b,min} / \sigma_{b,max} = 0$ (див. табл. 1 у публікації [4]). Графічна інтерпретація МЦВ досліджуваних бетонів представлена на рис. 4. Про прийнятність розробленого підходу до визначення $\eta_{b,cyc}$ із залученням відомих енергетичних положень свідчать статистичні характеристики варіаційних рядів нормального розподілу співвідношень $\eta_{b,cyc}^{exp} / \eta_{b,cyc}^{calc}$ (табл. 1), вказуючи на добру збіжність дослідних значень $\eta_{b,cyc}^{exp}$ і теоретичних величин $\eta_{b,cyc}^{calc}$, обчислених за формулою (30). При цьому середнє арифметичне співвідношень $\eta_{b,cyc}^{exp} / \eta_{b,cyc}^{calc}$ коливається в межах $M = 0,990 \dots 1,009$; коефіцієнт варіації – $V = (1,82 \dots 3,21)\%$, показник точності – $P = (0,49 \dots 0,86)\%$.

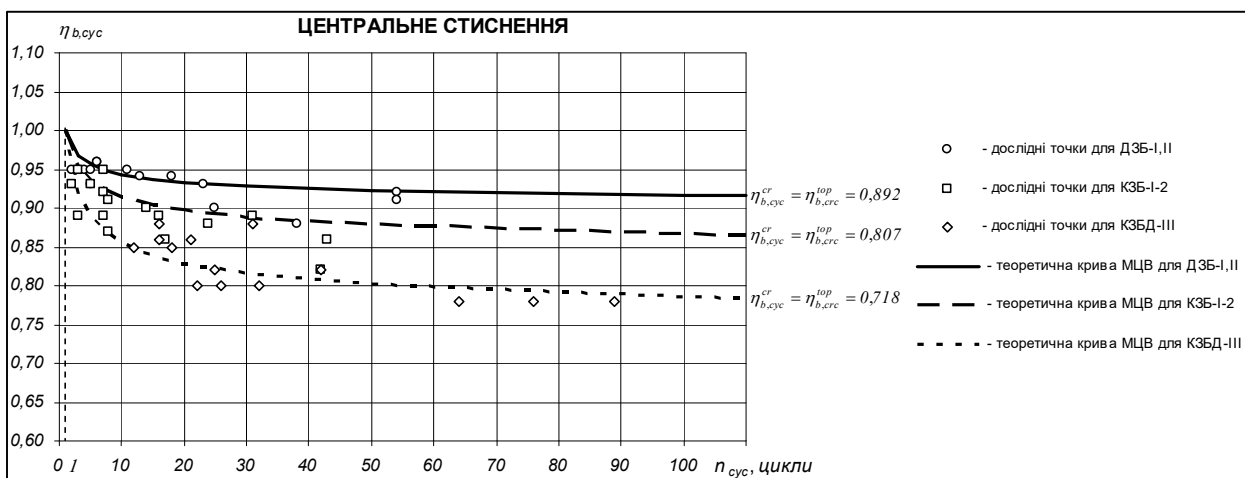


Рисунок 4 – Графіки малоциклової втоми (залежності “ $\eta_{b,cyc} \sim n_{cyc}$ ”) бетонів різних видів при центральному стисненні, що побудовані за отриманою із залученням енергетичних положень формулою (30)

Figure 4 – Graphs of low-cyclic fatigue (“ $\eta_{b,cyc} \sim n_{cyc}$ ” dependencies) of concretes of various types at the central compression, constructed from the formula (30), that is obtained with the use of energy provisions

Таблиця 1 – Числові значення сталих параметрів бетону та статистичні характеристики залежності (30)

Table 1 – Numerical values of constant parameters of concrete and statistical characteristics of the dependence (30)

Вид бетону	Сталі параметри бетону		Статистичні характеристики по $\eta_{b,cyc}^{exp} / \eta_{b,cyc}^{calc}$					Граничні відносні рівні МЦВ $\eta_{b,cyc}^{cr}$ на базі $N_{cyc}=n_{cyc}$ циклів			
	$\eta_{b,crc}^{top}$	v_{BR}	$N, \text{шт.}$	M	$\pm \sigma \times 10^2$	$V, \%$	$P, \%$	100	500	1000	∞
ДЗБ-ІІ	0,892	0,914	14	0,990	1,818	1,82	0,49	0,916	0,906	0,904	0,892
КЗБ-І-2	0,807	0,511	16	0,977	2,756	2,76	0,69	0,867	0,847	0,841	0,807
КЗБД-ІІІ	0,718	0,830	14	1,009	3,207	3,21	0,86	0,785	0,759	0,751	0,718

Примітки: 1. Тут прийняті ті ж самі позначення різних видів бетону, що і в табл. 1 публікації [4].
 2. Для визначення сталих параметрів $\eta_{b,crc}^{top}$ і v_{BR} використовували представлені у табл. 1 публікації [4] міцнісні та деформативні характеристики поздовжнього й поперечного деформувань відповідних бетонів при одноразовому центральному стисненні до руйнування.

Звернімо увагу на те, що наведені у табл. 2 публікації [1] і табл. 1 цієї статті дані з визначення відносних рівнів МЦВ за різними методиками (відповідно виключно експериментальною та із залученням енергетичних положень) дають дуже близькі результати: найбільша розбіжність між величинами $\eta_{b,cyc}^{cr}$ на базах $N_{cyc}=n_{cyc}=100, 500$ і 1000 циклів, а також при $n_{cyc} \rightarrow \infty$, становить $\Delta=4,18\%$. Отже, обидві методики можуть бути використані в практичних розрахунках.

Разом із тим, варто відзначити, що запропонований метод, базований на застосуванні енергетичних гіпотез, критеріїв і співвідношень до встановлення фізичного змісту деяких сталих коефіцієнтів бетону, видається більш ефективним. Уникаючи поставлення тривалих і надзвичайно кропітких експериментів, такий підхід дозволяє визначити $\eta_{b,cyc}^{cr}$ на певній базі випробувань N_{cyc} лише по параметрах його поздовжнього й поперечного деформувань при регламентованому чинним державним стандартом [37] одноразовому статичному навантажуванні до руйнування.

Перелік посилань

1. Бабич Є.М., Крусь Ю.А. Бетонні та залізобетонні елементи в умовах малоциклових навантажень. – Рівне: Вид-во РДГУ, 1999. – 119 с.
2. Крусь Ю.О. Малоциклові навантаження в комплексі впливів на будівельні конструкції, будівлі та споруди // Дороги і мости: Зб. наук. праць ДержДорНДІ ім. М.П.Шульгіна. У 2-х томах: Т. І. – Київ, 2007. – Вип. 7. – С. 323-343.
3. Крусь Ю.О. Класичні уявлення про роботу пружно-пластичних матеріалів в умовах циклічних навантажувальних // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів: Зб. наук. праць. – Львів: Каменяр, 2007. – Вип. 9. – С. 56-79.
4. Крусь Ю.А. Малоцикловая усталость бетона при сжатии и растяжении в феноменологической постановке // Бетон и железобетон в Украине. – 2009. – № 3(49). – С. 8-17.
5. Крусь Ю.А. Механизм деформирования и усталостного разрушения бетона в условиях статических малоцикловых нагружений центральным сжатием // Зб. наук. праць Укрінсталькон ім. В.М.Шимановського / Під заг. ред. д.т.н, проф. О.В.Шимановського. – К.: Вид-во «Сталь», 2016. – Вип. 18. – С. 132-149.
6. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
7. Сопротивление деформированию и разрушению при малом числе циклов нагружения: Сб. науч. тр. Гос. науч.-исслед. ин-та машиноведения АН СССР. – М.: Наука, 1967. – 171 с.
8. Усталость и выносливость металлов: Сб. статей / Пер. с англ. В.К.Житомирского; Под ред. Г.В.Ужика. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 497 с.
9. Багаудинов Р.М. Исследование напряжённо деформированного состояния бетона при статико-повторном малоцикловом нагружении: Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1985. – 166 с.

10. Барашиков А.Я., Шевченко Б.Н., Валовой А.И. Малоцикловая усталость бетона при сжатии // Бетон и железобетон. – 1985. – № 4. – С. 27-28.
11. Погореляк А.П. Исследование работы железобетонных изгибаемых элементов на поперечную силу при многократно повторных нагружениях: Дис. ... канд. техн. наук. – Ровно, 1981. – 174 с.
12. Ставров Г.Н., Руденко В.В., Федосеев А.А. Прочность и деформативность бетона при повторно статических нагружениях // Бетон и железобетон. – 1985. – № 1. – С. 33-34.
13. Яковлев С.К., Кожухов А.С., Тотосов В.Н. Работа сжатого бетона при повторно-статическом нагружении // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1990. – № 8. – С. 124-127.
14. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс: Учеб. для вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
15. Бондаренко В.М. Начала теории энергетического управления силовым сопротивлением строительных конструкций // Изв. вузов. Сер. Строительство. – 1996. – № 11. – С. 3-12.
16. Бондаренко В.М., Трегубенко Н.С. Опыт управления поглощением энергии при колебаниях конструкций инженерных систем // Изв. вузов. Сер. Строительство. – 1997. – № 9. – С. 20-25.
17. Гузеев Е.А., Шевченко В.И., Сейланов Л.А. Исследование силовых и энергетических параметров разрушения бетона по полностью равновесным диаграммам его деформирования // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1986. – № 8. – С. 1-5.
18. Корчинский И.Л. Оценка несущей способности конструкций при сейсмическом воздействии с энергетических позиций // Бетон и железобетон. – 1967. – № 2. – С. 24-28.
19. Адищев В.В., Митасов В.М. Энергетический подход к моделированию процесса образования трещин в изгибаемых железобетонных элементах // Изв. вузов. Сер. Строительство. – 2005. – № 4. – С. 26-31.
20. Корнев В.М., Адищев В.В. Достаточные критерии роста макротрещин нормального отрыва в среде регулярной структуры // Изв. вузов. Сер. Строительство. – 1999. – № 12. – С. 9-14.
21. Митасов В.М., Адищев В.В. О применении энергетических соотношений в теории сопротивления железобетона // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1990. – № 4. – С. 33-37.
22. Митасов В.М. Обобщённая формула перемещений при изгибе железобетонных балок // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1987. – № 1. – С. 4-7.
23. Ставров Г.Н., Руденко В.В. О критерии предельного состояния железобетонных конструкций при малоцикловых нагружениях // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1986. – № 7. – С. 1-4.
24. Алтухов В.Д. Оценка предела усталости бетона с использованием критериев механики разрушения // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1983. – № 1. – С. 17-21.
25. Кириллов А.П. Выносливость гидротехнического железобетона. – М.: Энергия, 1978. – 272 с.
26. Кузовчикова Е.А., Яшин А.В. Исследование влияния малоцикловых сжимающих воздействий на деформативность, прочность и структурные изменения бетона // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1976. – № 10. – С. 30-35.
27. Маилян Л.Р. Разработка методов системного комплексного расчёта железобетонных статически неопределимых балок с учётом полных диаграмм деформирования материалов, сечений и конструкций на статические, повторные и динамические воздействия: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01. – М., 1989. – 584 с.
28. Маилян Л.Р., Беккиев М.Ю., Силь Г.Р. Работа бетона и арматуры при многократно повторных нагружениях. – Нальчик, 1984. – 55 с.
29. Бабич Є.М., Крусъ Ю.О. До питання побудови діаграми деформування бетону та визначення коефіцієнта повноти епюри напружень // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. – Рівне: Вид-во РДТУ, 2001. – Вип. 6. – С. 94-104.
30. Крусъ Ю.О. Визначення характеристик структурних порушень бетону з позицій зміни кінематичних параметрів його об'ємного деформування // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. – Рівне: Вид-во РДТУ, 2000. – Вип. 4. – С. 187-194.
31. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи пластичности и ползучести: Спр. пособие. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.
32. Martin D.E. An energy criterion for low cyclic fatigue // ASME, Jo. of Basic Eng. – Ser. D. – 1961. – Vol. 4. – P. 105-112.
33. Halford G.R., Morrow J.D. Low cyclic fatigue in torsion // Proc. Amer. Soc. for Testing and Materials. – 1962. – Vol. 62. – P. 697-707.

34. Hanstock R.F. Damping capacity, strain hardening and fatigue // Proceedings Physical Society. – 1947. – Vol. 59. – P. 275-287.

35. Бабич Е.М., Крусь Ю.А., Гарницкий Ю.В. Новые аппроксимации зависимости “напряжения-деформации”, учитывающие нелинейность деформирования бетонов // Изв. вузов. Сер. Строительство. – 1996. – № 2. – С. 39-44.

36. Takeo Y., Yamanouchi H., Yamamoto S. Low cycle fatigue of thin-walled hollow cylindrical specimens of mild steel in uniaxial and torsional test at constant strain amplitude // International Journal of Fracture Mechanics. – 1965. – Vol. 1. – No. 1. – P. 463-474.

37. ДСТУ Б В.2.7-217:2009. Будівельні матеріали. Бетони. Методи визначення призмової міцності, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2010. – 16 с.

MATHEMATICAL MODELLING OF LOW-CYCLIC FATIGUE OF CONCRETE WITH ATTRACTION OF THE ENERGY PRINSIPLES

Krus Yuriy Oleksiyovych, National University of Water Management and Nature Resources Use (Rivne), Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Automobile Roads, Soil Bases and Foundations, Associate Professor, alkrous@ukr.net, +38 (096) 9643443, <https://orcid.org/0000-0001-5271-7765>.

Krus Oleksiy Yuriyovych, National University of Water Management and Nature Resources Use (Rivne), Engineer of the Research Production Business-Center of the Research Department, alexkrusexp@gmail.com, +38 (096) 9190551, <https://orcid.org/0000-0002-1989-0328>

Kaskiv Volodymyr I., Candidate of Engineering Science (Ph.D.), Associate Professor, Deputy Director on Scientific Work of DerzhdorNDI SE, e-mail: vi_kas@ukr.net, tel. +380504458544, Ukraine, Kyiv, Peremohy Av., 57, <https://orcid.org/0000-0002-8074-6798>

Gayevskiy Bogdan Volodymyrovych, National University of Water Management and Nature Resources Use (Rivne), Student of Educational and Scientific Institute of Building and Architecture, Specialization “Automobile Roads and Aerodromes”, nort22@ukr.net, +38 (096) 2615879, <https://orcid.org/0000-0002-0778-7673>

Summary: The results of numerous experimental researches on study of force influences on building constructions, buildings and structures are analysed. Is proved, that the prevailing majority of external loadings monotonously change or cyclically repeat, i.e. have variable character. Is revealed, that the action of high-level cyclic loadings (as a rule, with a few of reiterations) can cause specific deforming and destruction of materials and constructions. Examples are made from world statistics of accidents in building, that fixes numerous cases, when high-level low-cyclic force influences result in unexpected and swift fatigue failure of building and structures, thus mostly – with tragic consequences. At the same time, the fact of existence of the low-cyclic loading of high intensity and their influence on work of materials and constructions in no way is represented in the current regulatory documents.

In this connection experimental researches of work of fine-grained (cement-sandy) and coarse-grained (with ordinary fillers) concretes by high levels (near-by to destruction) of static low-cyclic loadings by central compression were conducted. The effective method of determination of low-cyclic fatigue and forecasting of cyclic durability of concrete, basing on well-known energetic principles (hypotheses, criteria and correlations) is developed. The reliability of the established dependences and made conclusions proves to be true by acceptable convergence of the experimental and calculated data.

Key words: concrete, low-cyclic loadings, low-cyclic fatigue, cyclic durability, the energy principles (hypotheses, criteria and correlations).

References

1. Babych Je.M., Krus' Ju.A. Betonni ta zalizobetonni elementy v umovah malocyklovyh navantazhen'. Rivne, Vyd-vo RDTU, 1999, 119 s. (In Ukrainian)

2. Krus' Ju.O. Malocyklovi navantazhennja v kompleksi vplyviv na budivel'ni konstrukcii', budivli ta sporudy. Dorogy i mosty: Zb. nauk. prac' DerzhDorNDI im. M.P.Shul'gina. U 2-h tomah: T. I. Kyi'v, 2007, vyp. 7, s. 323-343. (In Ukrainian)

3. Krus' Ju.O. Klasychni ujavlennja pro robotu pruzhno-plastychnyh materialiv v umovah cyklichnyh navantazhuvan'. Diagnostyka, dovgovichnist' ta rekonstrukcija mostiv: Zb. nauk. prac'. L'viv, Kamenjar, 2007, vyp. 9, s. 56-79. (In Ukrainian)
4. Krus' Ju.A. Malociklovaja ustalost' betona pri szhatii i rastjazhenii v fenomenologicheskoy postanovke. Beton i zhelezobeton v Ukraine. 2009, № 3(49), s. 8-17. (In Russian)
5. Krus' Ju.A. Mehanizm deformirovanija i ustalostnogo razrushenija betona v uslovijah staticheskikh malociklovyh nagruzhenij central'nym szhatiem. Zb. nauk. prac' Ukrinstal'kon im. V.M.Shymanov'skogo, Pid zag. red. d.t.n, prof. O.V.Shymanov'skogo. K., Vyd-vo «Stal'», 2016, vyp. 18, s. 132-149. (In Russian and in Ukrainian)
6. Moskvitin V.V. Ciklicheskie nagruzhenija jelementov konstrukcij. M., Nauka, 1981, 344 s. (In Russian)
7. Soprotivlenie deformirovaniju i razrusheniju pri malom chisle ciklov nagruzhenija: Sb. nauch. tr. Gos. nauch.-issled. in-ta mashinovedenija AN SSSR. M., Nauka, 1967, 171 s. (In Russian)
8. Ustalost' i vynoslivost' metallov: Sb. Statej. Per. s angl. V.K.Zhitomirskogo; Pod red. G.V.Uzhika. M., Izd-vo inostr. lit-ry, 1963, 497 s. (In Russian)
9. Bagaudinov R.M. Issledovanie naprjazhjonno deformirovannogo sostojanija betona pri statiko-povtornom malociklovom nagruzhenii: Dis. ... kand. tehn. nauk. M., 1985, 166 s. (In Russian)
10. Barashikov A.Ja., Shevchenko B.N., Valovoj A.I. Malociklovaja ustalost' betona pri szhatii. Beton i zhelezobeton. 1985, № 4, s. 27-28. (In Russian)
11. Pogoreljak A.P. Issledovanie raboty zhelezobetonnyh izgibaemyh jelementov na poperechnuju silu pri nemnogokratno povtornyh nagruzhenijah: Dis. ... kand. tehn. nauk. Rovno, 1981, 174 s. (In Russian)
12. Stavrov G.N., Rudenko V.V., Fedoseev A.A. Prochnost' i deformativnost' betona pri povtorno staticheskikh nagruzhenijah. Beton i zhelezobeton. 1985, № 1, s. 33-34. (In Russian)
13. Jakovlev S.K., Kozhuhov A.S., Totosov V.N. Rabota szhatogo betona pri povtorno-staticheskom nagruzhenii. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 1990, № 8, s. 124-127. (In Russian)
14. Bajkov V.N., Sigalov Je.E. Zhelezobetonnye konstrukcii: Obshhij kurs: Ucheb. dlja vuzov. 5-e izd., pererab. i dop. M., Strojizdat, 1991, 767 s. (In Russian)
15. Bondarenko V.M. Nachala teorii jenergeticheskogo upravlenija silovym soprotivleniem stroitel'nyh konstrukcij. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo. 1996, № 11, s. 3-12. (In Russian)
16. Bondarenko V.M., Tregubenko N.S. Opyt upravlenija pogloshheniem jenerгии pri kolebanijah konstrukcij inzhenernyh sistem. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo. 1997, № 9, s. 20-25. (In Russian)
17. Guzeev E.A., Shevchenko V.I., Sejlanov L.A. Issledovanie silovyh i jenergeticheskikh parametrov razrushenija betona po polnost'ju ravnovesnym diagrammam ego deformirovanija. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 1986, № 8, s. 1-5. (In Russian)
18. Korchinskij I.L. Ocenka nesushhej sposobnosti konstrukcij pri sejsmicheskom vozdejstvii s jenergeticheskikh pozicij. Beton i zhelezobeton. 1967, № 2, s. 24-28. (In Russian)
19. Adishhev V.V., Mitasov V.M. Jenergeticheskij podhod k modelirovaniju processa obrazovanija treshhin v izgibaemyh zhelezobetonnyh jelementah. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo. 2005, № 4, s. 26-31. (In Russian)
20. Kornev V.M., Adishhev V.V. Dostatochnye kriterii rosta makrotreshhin normal'nogo otrывa v srede reguljarnoj struktury. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo. 1999, № 12, s. 9-14. (In Russian)
21. Mitasov V.M., Adishhev V.V. O primenenii jenergeticheskikh sootnoshenij v teorii soprotivlenija zhelezobetona. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 1990, № 4, s. 33-37. (In Russian)
22. Mitasov V.M. Obobshhjonnaja formula peremeshhenij pri izgibe zhelezobetonnyh balok. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 1987, № 1, s. 4-7. (In Russian)
23. Stavrov G.N., Rudenko V.V. O kriterii predel'nogo sostojanija zhelezobetonnyh konstrukcij pri malociklovyh nagruzhenijah. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 1986, № 7, s. 1-4. (In Russian)
24. Altuhov V.D. Ocenka predela ustalosti betona s ispol'zovaniem kriteriev mehaniki razrushenija. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 1983, № 1, s. 17-21. (In Russian)

25. Kirillov A.P. Vynoslivost' gidrotehnicheskogo zhelezobetona. M., Jenergija, 1978, 272 s. (In Russian)
26. Kuzovchikova E.A., Jashin A.V. Issledovanie vlijaniya malociklovyh szhimajushhih vozdeystvij na deformativnost', prochnost' i strukturnye izmeneniya betona. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'st-vo i arhitektura. 1976, № 10, s. 30-35. (In Russian)
27. Mailjan L.R. Razrabotka metodov sistemnogo kompleksnogo raschjota zhelezobetonnyh staticheskij neopredelimiym balok s uchjotom polnyh diagramm deformirovaniya materialov, sechenij i konstrukcij na staticheskie, povtornyje i dinamicheskie vozdeystviya: Dis. ... d-ra tehn. nauk: 05.23.01. M., 1989, 584 s. (In Russian)
28. Mailjan L.R., Bekkiev M.Ju., Sil' G.R. Rabota betona i armatury pri nemnogokratno povtornyh nagruzenijah. Nal'chik, 1984, 55 s. (In Russian)
29. Babych Je.M., Krus' Ju.O. Do pytannja pobudovy diagramy deformuvannja betonu ta vyznachennja koeficijenta povnoty epjury napruzhen'. Resursoekonomni materialy, konstrukcii', budivli ta sporudy: Zb. nauk. prac'. Rivne, Vyd-vo RDTU, 2001, vyp. 6, s. 94-104. (In Ukrainian)
30. Krus' Ju.O. Vyznachennja harakterystyk strukturnyh porushen' betonu z pozycij zminy kinematychnyh parametriv jogo ob'jemnogo deformuvannja. Resursoekonomni materialy, konstrukcii', bu-divli ta sporudy: Zb. nauk. prac'. Rivne, Vyd-vo RDTU, 2000, vyp. 4, s. 187-194. (In Ukrainian)
31. Pisarenko G.S., Mozharovskij N.S. Uravnenija i kraevye zadachi plastichnosti i polzuchesti: Spr. posobie. Kiev, Naukova dumka, 1981, 496 s. (In Russian)
32. Martin D.E. An energy criterion for low cyclic fatigue. ASME, Jo. of Basic Eng. Ser. D. 1961, vol. 4, pp. 105-112.
33. Halford G.R., Morrow J.D. Low cyclic fatigue in torsion. Proc. Amer. Soc. for Testing and Materials. 1962, vol. 62, pp. 697-707.
34. Hanstock R.F. Damping capacity, strain hardening and fatigue. Proceedings Physical Society. 1947, vol. 59, pp. 275-287.
35. Babich E.M., Krus' Ju.A., Garnickij Ju.V. Novye approksimacii zavisimosti "naprjazhenija-deformacii", uchityvajushhie nelinejnost' deformirovaniya betonov. Izv. vuzov. Ser. Stroitel'stvo. 1996, № 2, s. 39-44. (In Russian)
36. Takeo Y., Yamanouchi H., Yamamoto S. Low cycle fatigue of thin-walled hollow cylindrical specimens of mild steel in uniaxial and torsional test at constant strain amplitude. International Journal of Fracture Mechanics. 1965, vol. 1, no. 1, pp. 463-474.
37. DSTU B V.2.7-217:2009. Budivel'ni materialy. Betony. Metody vyznachennja pryzmovoi' micnosti, modulja pruzhnosti i koeficijenta Puassona. Kyi'v, Minregionbud Ukrai'ny, 2010, 16 s. (In Ukrainian)