УДК 624 **DOI: 10.33744/0365-8171-2021-109-079-087**

ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ІНТЕНСИВНОСТІ ВІДМОВ НА ОСНОВІ МАРКІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

DETERMINATION OF FAILURE RATE FUNCTION ON THE BASIS OF THE MARKOVIAN PROCESS

Башкевич Ірина Василівна, *кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, кафедра «Мости, тонелі та гідротехнічні споруди», асистент, e-mail: iv.bashkevych@gmail.com, +380509292285,*

https://orcid.org/0000-0001-7640-4317

Євсейчик Юрій Борисович, *кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний транспортний університет, кафедра «Мости, тонелі та гідротехнічні споруди», доцент, e-mail: jura_ntu@ukr.net, +380442807978,*

https://orcid.org/0000-0002-3507-4734

Медведєв Костянтин Володимирович, *кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний транспортний університет, кафедра «Мости, тонелі та гідротехнічні споруди», професор, e-mail: kvmedvediev@gmail.com, +380442807978,*

https://orcid.org/0000-0002-0704-7093

Янчук Леонід Леонідович, *кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, кафедра «Мости, тонелі та гідротехнічні споруди», доцент, e-mail: leonid.ianchuk@gmail.com, +380442807978,*

https://orcid.org/0000-0003-1269-1251

Анотація. Життєвий цикл конструкції (або її елемента) розглядається як марковський процес з дискретними станами і неперервним часом. Прийнято п'ять експлуатаційних станів, в яких може знаходитись конструкція. Для випадку однорідного марковського процесу з постійною величиною інтенсивності переходів отримано відповідну систему диференційних рівнянь (систему Колмогорова).

Для вирішення системи рівнянь в аналітичному вигляді застосований метод невизначених коефіцієнтів. Отримані рішення дають можливість визначити імовірність знаходження конструкції в конкретному стані, а також найбільш імовірний час переходу конструкції від одного експлуатаційного стану до іншого. Визначена функція безпеки, як імовірність не знаходження конструкції в останньому (непрацездатному) стані і функція інтенсивності відмов. Приведено і досліджено графіки імовірності знаходження конструкції в кожному із п'яти станів, функції надійності та функції інтенсивності відмов. Отримані аналітичні залежності дають можливість визначення довговічності та залишкового ресурсу роботи, як окремих елементів, так і споруди в цілому, а також дозволить оптимізувати планування проведення поточних ремонтних робіт, значно поліпшити експлуатаційні показники споруди, скоротити витрати на ремонтні заходи та подовжити строк життєвого циклу споруди.

Ключові слова: функція надійності, рівняння Колмогорова, марковська модель, інтенсивність відмов, довговічність, залишковий ресурс.

Вступ. У відповідності до класичного визначення [13] надійність конструкції в момент часу t є ймовірністю складної події, яка полягає в тому, що: відмова не відбудеться на момент початку експлуатації конструкції ($t = 0$), тобто рівень навантаження в початковий момент експлуатації не перевищить гранично допустимого і відмова не відбудеться до часу t ($t > 0$). Позначимо ймовірність цих подій, як P_0 і P_t відповідно. Тоді згідно з теоремою множення ймовірностей незалежних подій надійність конструкції визначається як

$$N = P_0 \cdot P_t. \tag{1}$$

Величину P_0 можна назвати початковою або проектною надійністю і, як відомо [3, 8, 13], вона є функцією характеристики безпеки β, тобто

$$P_0 = N(\beta, t)_{|t=0} = F(\beta). \tag{2}$$

Функція P_t (далі по тексту $P(t)$) є ймовірністю безвідмовної роботи (функцією безпеки) конструкції на інтервалі часу від 0 до t. Вона пов'язана з інтенсивністю відмов конструкції $\lambda_{fr}(t)$ (*failure rate*) диференційною залежністю:

$$\lambda_{fr}(t) = -\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt}. \tag{3}$$

Фізичний зміст функції $\lambda_{fr}(t)$ детально викладено [4, 5, 6].

Після інтегрування (3) і з урахуванням очевидної рівності

$$P(t)_{|t=0} = 1$$

Отримуємо

$$P(t) = exp\left[-\int_0^t \lambda_{fr}(t)dt\right]. \tag{4}$$

З урахуванням (2) і (4) залежність (1) можна записати у вигляді

$$N(\beta, t) = F(\beta) exp\left[-\int_0^t \lambda_{fr}(t)dt\right]. \tag{5}$$

Мета і методи. При визначені надійності конструкції $N(\beta, t)$ величину P_0 можна розглядати як незалежний від часу коефіцієнт при функції безпеки $P(t)$. Метод визначення проектної надійності конструкції ($P_0 \equiv F(\beta)$) достатньо висвітлено в [3, 8, 13] і в більшості випадків, виражається через функцію Лапласа.

Що стосується функції безпеки (4), то на сьогоднішній день не існує загально прийнятної моделі її поведінки, тому побудова адекватної залежності $P(t)$ потребує всебічного теоретичного і практичного дослідження.

У сучасних умовах, коли більшість мостових конструкцій в Україні вже мають суттєвий строк експлуатації, визначення їх надійності (а отже і залишкового ресурсу) є надзвичайно актуальною задачею.

У роботі проводиться дослідження функції безпеки конструкції на основі марковської моделі, запропонованої в [8, 9, 10]. На відміну від раніше розглянутої моделі [7], в якій $P(t)$ визначалась на кожному характерному інтервалі часу експлуатації, в цій роботі надійність системи визначається із системи диференційних рівнянь Колмогорова для всього проміжку часу експлуатації конструкції. За стани марковського ланцюга прийнято експлуатаційні стани мостових конструкцій, які у відповідності до чинного ДСТУ [1] поділено на 5 станів:

Стан 1 – справний;

Стан 2 – обмежено справний;

Стан 3 – працездатний;

Стан 4 – обмежено працездатний;

Стан 5 – непрацездатний.

Результати і пояснення. Час переходу споруди з одного стану до іншого є випадковою величиною, тому моделі, що характеризують такий процес мають базуватися на теорії імовірностей (стохастичні моделі). Однією з таких стохастичних моделей і є модель, яку використано в цій роботі, а саме марковська модель з дискретними станами і неперервним часом [4].

Відповідно до цієї моделі час переходу між дискретними станами відбувається у випадкові моменти часу. Граф процесу розглянемо у найпростішому вигляді, наведеному на рисунку 1.

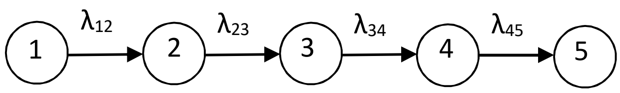

Рисунок 1 – Час переходу споруди з одного стану до іншого.
Figure 1 – Time of transition of a structure from one state to another

де λ_{ij} - щільність потоку випадкових подій, який переводить систему із стану i до стану j.

У загальному випадку переходи із стану в стан можуть бути довільними. Так наприклад, якщо можливий перехід із стану 3 до стану 1 (внаслідок проведення ремонту), відповідний параметр $\lambda_{31} \neq 0$.

У випадку марковського ланцюга, що розглядається, не нульові λ_{ij} представлено на рисунку 1. Як відомо [4], марковський процес з неперервним часом описується системою диференційних рівнянь Колмогорова, яка для випадку, що розглядається має вигляд:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23}p_2 + \lambda_{12}p_1;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2; \tag{6}$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{45}p_4 + \lambda_{34}p_3;$$

$$\frac{dp_5}{dt} = \lambda_{45}p_4.$$

Ця система у матричному вигляді набуває вигляду

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = A\bar{p}, \tag{7}$$

де $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ - вектор стовбець, $p_i(t)$ - ймовірність знаходження системи в i - тому стані, а A – матриця розміром 5x5:

$$A = \begin{Vmatrix} -\lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & -\lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{34} & -\lambda_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{45} & 0 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Оскільки система може знаходитись лише в одному із п'яти станів, для довільного часу t можна записати:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i(t) = 1 \tag{9}$$

Початкові умови для інтегрування системи (6) характеризують стан системи на момент часу $t = 0$:

$$p_1(0) = 1;\ p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = 0. \tag{10}$$

Якщо вважати коефіцієнти λ_{ij} незалежними від часу, то система (6) представляє собою систему звичайних диференційних рівнянь 1-го порядку із постійними коефіцієнтами.

Побудуємо розв'язок системи (6) для випадку однорідного марковського процесу з однаковими коефіцієнтами: $\lambda_{ij} = \lambda = const$

Розв'язок системи рівнянь (6) з початковими умовами (10) шукаємо методом невизначених коефіцієнтів [12].

Характеристичне рівняння системи (6) можна записати у вигляді:

$$det\|A - kE\| = 0 \tag{11}$$

де E - одинична матриця 5-го порядку, а k - характеристичне число. Із урахуванням (8) характеристичне рівняння (11) набуває вигляд:

$$k(k+\lambda)^4 = 0. \tag{12}$$

Коренями рівняння (12) є числа $k = 0$ із кратністю 1 і $k = -\lambda$ із кратністю 4. Відповідно до [12] вектор фундаментальних розв'язків $\bar{q} = (\, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ має вигляд:

$$\bar{q} = (\, 1, e^{-\lambda t}, te^{-\lambda}\, , t^2 e^{-\lambda t}, t^3 e^{-\lambda}\,), \tag{13}$$

а розв'язок системи (6) можемо записати у вигляді:

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{5} C_{ij}\, q_i \qquad , \tag{14}$$

де C_{ij} – константи (невизначені коефіцієнти), які визначаються із початкових умов (10).

З урахуванням (13) і (14) розв'язок системи (6) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &p_1(t) = e^{-\lambda t}; p_2(t) = \lambda t e^{-\lambda t}; p_3(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}; p_4(t) = \frac{\lambda^3 t^3}{6} e^{-\lambda t}; \\ &p_5(t) = 1 - \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \frac{\lambda^3 t^3}{6}\right) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{15}$$

Неважко перевірити, що функції (15) задовольняють систему (6), початкові умови (10) і умову нормування (9).

Цілком очевидна також поведінка функції $p_i(t)$ при $t \to \infty$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0; p_5 = 1. \tag{16}$$

П'ятий стан є кінцевим (конструкція знаходиться в непрацездатному стані), тому ймовірність не знаходження конструкції в даному стані є шуканою функцією безпеки [4]:

$$P(t) = 1 - p_5(t) = \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \frac{\lambda^3 t^3}{6}\right) e^{-\lambda t}. \tag{17}$$

Вираз (17) функції безпеки дає можливість при відомих значеннях λ і P_0 визначити надійність конструкції на даний момент часу, а також прогнозувати залишковий ресурс її роботи. Також можна визначити ймовірність знаходження системи в одному із її станів за функціями (15).

Залежність (17) неважко узагальнити для довільного числа станів n

$$P(t) = 1 - p_n(t) = \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{\lambda^{n-2} t^{n-2}}{(n-2)!}\right) e^{-\lambda} .$$

Слід зауважити, що в рівняннях (15) функції $p_1(t)$, і $p_5(t)$ є монотонними, а функції $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ - мають точки екстремуму. Дослідивши ці функції неважко показати, що $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ досягають максимальних значень при $t_{max}^{(2)} = \frac{1}{\lambda}$; $t_{max}^{(3)} = \frac{2}{\lambda}$; $t_{max}^{(4)} = \frac{3}{\lambda}$ відповідно.

На рисунку 2 наведено результати чисельного розрахунку залежностей $p_i(t)$ та $P(t)$ при $\lambda = 0{,}08$.

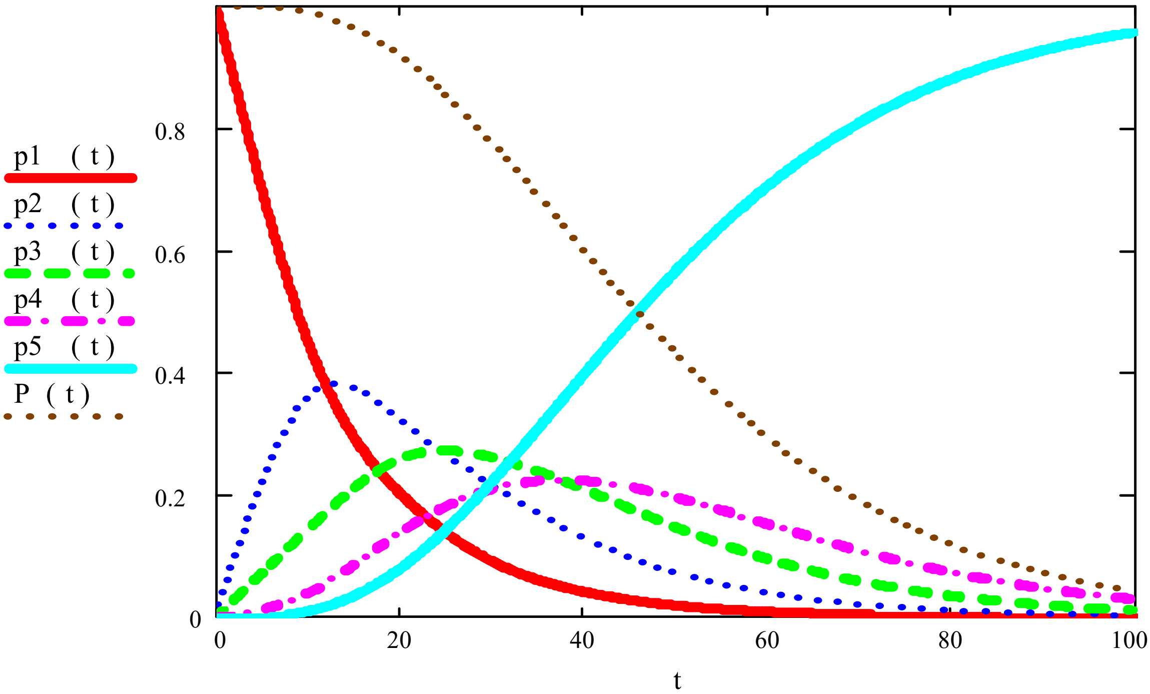

Рисунок 2 – Функції $p_i(t)$ та $P(t)$

Figure 2 – Function $p_i(t)$ and $P(t)$

Наведений спосіб побудови аналітичного розв'язку $p_i(t)$ не важко узагальнити для випадку різних λ_{ij}, а також для іншої кількості проміжних станів.

Функція інтенсивності відмов (3) з урахуванням (17) має вигляд

$$\lambda_{fr} = \frac{\lambda^4 t^3}{(6 + 6\lambda t + 3\lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3)} \tag{18}$$

Графік функції $\lambda_{fr}(t)$ представлено на рисунку 3.

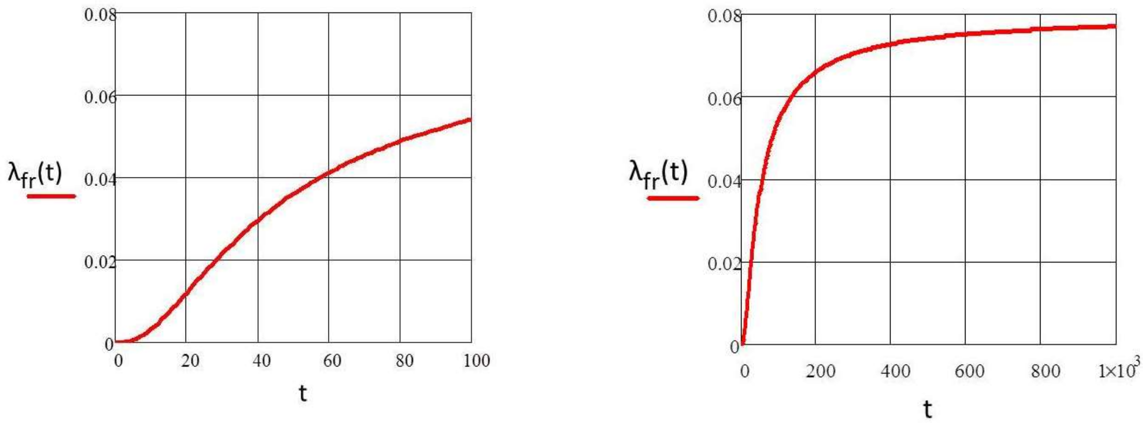

Рисунок 3 – Графік функції $\lambda_{fr}(t)$
Figure 3 – Function graph $\lambda_{fr}(t)$

На рис 3 а, б наведено графіки функції інтенсивності відмов на двох різних часових відрізках. Як видно з графіку функція $\lambda_{fr}(t)$, для прийнятої моделі, починається з нуля і є монотонно зростаючою. Причому, на початковому етапі (близько 5 років) функція $\lambda_{fr}(t)$ майже дорівнює нулю. Це свідчить про те, що в конструкції не відбуваються відмови і надійність її лишається такою ж самою, як і на початку її експлуатації. Далі на практичному етапі експлуатації (від 0 до 100 років), як показано на рисунку 3а, помітно досить інтенсивне зростання функції $\lambda_{fr}(t)$. При великих значеннях t (рисунок 3б), які взяті гіпотетично для дослідження поведінки функції $\lambda_{fr}(t)$, видно, що $\lambda_{fr}(t)$ асимптотично прямує до λ в нашому випадку $\lambda = 0{,}08$.

Висновки та рекомендації. Отримані аналітичні залежності дозволяють визначити ймовірність знаходження конструкції в кожному із станів, а також функцію надійності в цілому для довільного часу експлуатації, а також визначити залишковий ресурс конструкції.

Запропонований метод аналітичного вирішення системи диференційних рівнянь Колмогорова може бути узагальнений і для випадку багато параметричної системи з різними λ_{ij}, яка є більш наближеною до реальної роботи конструкцій.

Визначення функцій $p_i(t)$ (15) дозволяє покращити точність прогнозування часу переходу з одного проміжного стану до іншого і може бути використано при плануванні поточних ремонтних робіт (міжремонтних термінів).

Отримані результати розв'язку рівнянь можуть бути використані як модельні (порівняльні) для більш складного випадку неоднорідного ($\lambda = \lambda(t)$) марковського процесу. Система рівнянь Колмогорова для цього випадку не дозволяє отримати рішення в аналітичному вигляді.

Слід звернути увагу, що з рис. 2 видно, перехід конструкції із стану в стан проходить в час, коли функція ймовірності знаходження конструкції в даному стані досягає максимуму, а це дає змогу визначити поточний стан конструкції.

Перелік посилань

1. ДСТУ-Н Б В.2.3-23:2009. Настанова з оцінювання і прогнозування технічного стану автодорожніх мостів: – К. : Мінрегіонбуд України, 2009. – 49 с.

2. Богданоф Дж. Вероятностные модели накопления повреждений / Козин Ф. – М.: Мир, 1989. – 344 с.

3. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. / В. В. Болотин. – М: Машиностроение, 1990. – 446 с.

4. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения /Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров – Москва : Высш. школа, 2000. – 383 с.

5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е.Гмурман. – Москва : Высшая школа. – 1972. – 367 с.

6. Гнеденко В.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности / В.В.Гнеденко, Ю.К.Беляев, А.Д.Соловьев. Гнеденко В.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. – Москва : Наука. – 1965. – 361 с.

7. Євсейчик Ю. Б., Медведєв К. В. Алгоритм визначення надійності елемента конструкції при змінній функції інтенсивності відмов //Зб. Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 2017, вип. 99 – с.210 - 217.

8. Лантух-Лященко А.I. Вероятностная модель оценки технического состояния и прогноза остаточного ресурса элементов автодорожных мостов / М.: Дороги и мосты. Российский дорожный научно-исследовательский институт. 2007. – с. 103–111

9. Лантух-Лященко А.І. Оцінка надійності споруди за моделлю марковського випадкового процесу з дискретними станами. //Зб. Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 1999, вип.57 – с.183-188.

10.Лантух-Лященко А.І. Оцінка технічного стану транспортних споруд, що знаходяться в експлуатації. Вісник транспортної академії України, №3, Київ: 1999.-с. 59-63.

11.Лантух-Лященко А.І., Кір'ян В.І., Коваль П.М. та ін. Настанови з визначення технічного стану мостів. - ТАУ. Вид. "Логос", К.: 2002. 117 с.

12.Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.

13.Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М. Стройиздат, 1978.

DETERMINATION OF FAILURE RATE FUNCTION ON THE BASIS OF THE MARKOVIAN PROCESS

Bashkevych Iryna Vasilivna, Candidate of Engineering Sciences, National Transport University, Department of Bridges, tunnels and hydraulic structures, Assistant Lecturer, e-mail: iv.bashkevych@gmail.com, +380442807978, https://orcid.org/0000-0001-7640-4317.

Yevseichyk Yurii Borysovych, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Transport University, Department of Bridges, tunnels and hydraulic structures, Associate Professor, e-mail: jura_ntu@ukr.net, +380442807978, https://orcid.org/0000-0002-3507-4734

Medvediev Kostiantyn Volodymyrovych, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Transport University, Department of Bridges, tunnels and hydraulic structures, Professor, e-mail: kvmedvediev@gmail.com, +380442807978, https://orcid.org/0000-0002-0704-7093.

Yanchuk Leonid Leonidovych, Candidate of Engineering Sciences, National Transport University, Department of Bridges, tunnels and hydraulic structures, Associate Professor, e-mail: leonid.ianchuk@gmail.com, +380442807978, https://orcid.org/0000-0003-1269-1251.

Summary. The life cycle of a construction (or its element) is considered as markovian process with discrete states and continuous time. Five operational states have been accepted, in which the construction may be. The corresponding system of differential equations is obtained for the case of a homogeneous markovian process with a constant conversion rate (Kolmogorov system). The method of uncertain coefficients is applied to solve the system of equations in analytical form. The obtained solutions make it possible to determine the probability of finding the construction in a particular state as well as the most likely transition time from one operational state to another. Security function defined as the probability of not finding the construction in its last (inoperable) state and the failure rate function. The graphs of the probability of finding a construction in each of the five states, reliability and failure rate functions are presented and investigated. The obtained analytical dependences make it possible to determine the longevity and residual life of the work both individual elements and structures as a whole and optimize scheduling for ongoing maintenance work, significantly improve the performance of the structure, reduce the cost of repair work and extend the life of the structure.

Keywords: reliability function, Kolmogorov equations, markovian model, failure rate, durability, residual life.

References

1. DSTU-N B V.2.3-23: 2009. Guidelines for estimating and forecasting the technical condition of road bridges: - K .: Minregionstroi Ukraine, 2009. - 49 p.2. Bogdanof J. Probabilistic models of damage accumulation / Kozin F. - Moscow: Mir, 1989. - 344 p.

3. Bolotin V.V. Resource machines and structures. / V.V. Bolotin. - M: Mechanical Engineering, 1990. - 446 p.

4. Wentzel, E.S. Theory of random processes an d its engineering applications / E. S. Wentzel, L. A. Ovcharov - Moscow: Higher. School, 2000. - 383 p.

5. Gmurman, V.E. Probability theory and mathematical statistics / V.E. Gmurman. - Moscow: High School. - 1972. - 367 s.

6. Gnedenko V.V., Belyaev Yu.K., Soloviev A.D. Mathematical methods in the theory of reliability / V.V. Gnedenko, Yu.K. Belyaev, A.D. Soloviev. Gnedenko V.V., Belyaev Yu.K., Soloviev A.D. - Moscow: Science. - 1965. - 361 s.

7. Yevseychik Yu.B., Medvediev K.V. Algorithm for determining the reliability of an element of a design with a function of the function of the intensity of the failures // Prob. Motor roads and road construction. - 2017, vp. 99 - p.210 - 217.

8. Lantuh-Lyashchenko A.I. A probabilistic model for assessing the technical condition and forecasting the residual life of road bridge elements / Lantukh-Lyashchenko A.I. - M .: Roads and bridges. Russian Road Research Institute. 2007. - p. 103–111

9. Lantuch-Lyashenko A.I. Estimation of the reliability of the construction on the model of a random Markov process with discrete states. // Sb. Motor roads and road construction. - 1999, issue 57 - pp. 183-188.

10. Lantuch-Lyashenko A.I. Estimation of technical condition of transport structures in operation. Bulletin of the Transport Academy of Ukraine, №3, Kyiv: 1999.-c. 59-63.

11. Lantuch-Lyashenko AI, Kirian V.I., Koval P.M. etc. Guidelines for determining the technical condition of bridges. - TAO Kind. "Logos", K.: 2002. 117 p.

12. Petrovsky I.G. Lectures on the theory of ordinary differential equations. M .: Science, 1970.

13. Rzhanitsyin A.R. Teoriya rascheta stroitelnyih konstruktsiy na nadezhnost. M.: Stroyizdat, 1978.