

ЕФЕКТИВНІСТЬ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ПЕРЕМІННИМИ ТА УСЕРЕДНЕНИМИ МЕХАНІЧНИМИ ТА ГЕОМЕТРИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

PERFORMANCE OF FINITE ELEMENTS WITH VARIABLE AND AVERAGED MECHANICAL AND GEOMETRIC PARAMETERS OF THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD



Кузьмінець Микола Петрович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедру комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: kuzminecnp@ukr.net, тел. +380983600812, Україна, 01103, м. Київ, вул. М. Бойчука, 40 А.

<https://orcid.org/0000-0002-9636-919X>



Максим'юк Юрій Всеволодович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

<https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>



Мартинюк Іван Юрійович, кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

<https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

Анотація. Дослідження проблем, що відносяться до розробки чисельних методів розрахунку конструкцій на основі МСЕ, слід особливо виділити обґрунтування достовірності отриманих результатів і порівняння ефективності підходів, що розвиваються по відношенню до існуючих. Теоретично це не завжди вдається виконати навіть для окремих випадків, через це до розв'язання зазначених питань залучаються, як правило, дані чисельних експериментів, одержуваних на контрольних задачах. У цій статті шляхом розв'язання конкретних задач проводиться порівняння ефективності скінчених елементів зі змінними і усередненими механічними і геометричними параметрами і досліджується збіжність рядів Фур'є, поліномів і МСЕ. Крім того для більш повного обґрунтування достовірності результатів, одержуваних на основі розробленої методики та програм, додатково розглянуто в пружному та пружно-пластичному постановках ряд контрольних прикладів, які охоплюють масивні і тонкостінні об'єкти.

Ключові слова. Метод скінчених елементів (МСЕ), напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), призматичний скінчений елемент (CE1), масивні, тонкостінні призматичні тіла, вектор вузлових реакцій, коефіцієнти матриці жорсткості.

Постановка проблеми

Значне число досліджень, пов'язаних з розробкою і застосуванням НМСЕ [1, 2, 14,], як правило, використовуються співвідношення тонких оболонок (в враховані деформації поперечного зсуву). Розглянуто різні питання, пов'язані з урахуванням локальних впливів [3], розрахунком розгалужених і

складових систем [4, 5], визначенням напружено-деформованого стану ребристих оболонок змінної товщини при термосилового навантаження [6], орієнтацією підкріплює набору конструктивно-анізотропної оболонки. В [9] запропоновано методику аналізу напружено-деформованого стану циклічно неоднорідних в круговому напрямку оболонок.

У роботах, що відображають застосування напіваналітичного методу скінченних елементів до розрахунку тіл обертання [2, 3, 4, 5, 11], використані трикутні СЕ з лінійним [2] і квадратичним [16] розподілом переміщень, прямокутні чотирихвужлові [15] і чотирикутні криволінійні восьмивузлові [17]. Достовірність отриманих на їх основі результатів підтверджена розв'язанням контрольних прикладів [16]. Розв'язані також конкретні задачі про пружне [3, 4, 8] і пружно-пластичне [9, 10] деформування ряду об'єктів.

Різні аспекти розробки і застосування підходу, заснованого на використанні універсального скінченного елемента, що дозволяє досліджувати в пружній і пружно-пластичній постановці масивні і тонкостінні не вісесиметричні навантажені силовими і температурними впливами тіла обертання, розглянуті в роботах [1,7]. Основні принципи узагальнення даної модифікації НМСЕ на розв'язання задач пружного і пластичного деформування циклічних об'єктів зі змінними по круговій координаті механічними і геометричними параметрами викладені в [12]. Публікації [11, 13] присвячені реалізації цих принципів стосовно зазначеного класу об'єктів.

Проведений аналіз літературних джерел показує, що в розглянутих публікаціях не знайшли належного відображення питання, пов'язані із застосуванням напіваналітичного методу скінченних елементів до розрахунку тонкостінних призматичних тіл, в пружно-пластичній, а масивних навіть в пружній постановках. Крім того відсутні публікації з даного напрямку, присвячені розробці універсальних призматичних кінцевих елементів, що дозволяють досліджувати масивні, тонкостінні і комбіновані конструкції.

Порівняння ефективності скінченних елементів зі змінними та усередненими механічними та геометричними параметрами

По відношенню до скінченного елемента зі змінними механічними і геометричними параметрами (СЕ1) використання скінченного елемента з їх усередненими значеннями (СЕ2) дозволяє значно скоротити обсяг обчислень, пов'язаних з виконанням операцій чисельного інтегрування в перерізі $X^3 = const$. Однак внаслідок прийнятих припущень щодо характеру розподілу C^{ijkl} та g за площею поперечного перерізу СЕ2 цих елементів може знадобитися більше, ніж СЕ1, для досягнення однакової точності результатів.

З метою порівняння ефективності обох варіантів скінченних елементів розглянемо задачу про пружну рівновагу циліндричної панелі і пружно-пластичній деформації нескінченної смуги прямокутного перерізу.

Розрахункова схема шарнірно закріплена по торцях і навантажена власною вагою панелі приведена на рис.1. Товщина оболонки $\delta = 7,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, довжина утворюваної $a = 200$, радіус середньої поверхні $R = 100$, кут $\alpha = 40^\circ$. Відношення інтенсивності рівномірно розподіленого по площі серединної поверхні навантаження до модуля пружності матеріалу $q' / E = 2,09 \cdot 10^{-7}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0$. За товщиною оболонка апроксимувалася одним скінченим елементом при утриманні 9 членів розкладання в ряди Фур'є

Дані, що відображають вплив на результати розрахунку панелі кількості скінченних елементів зі змінними механічними та геометричними параметрами, представлені в табл. 1. Тут M - число елементів вздовж направляючої, що припадає на кут α , $V_x = U_x / \delta$ -максимальне відносне переміщення по напрямку осі Z^3 , $V_y = U_y / \delta$ -максимальне відносне переміщення по напрямку осі Z^1 . У відсотках представлена їх похибка по відношенню до значень, обчислених при $M = 12$. Її зміна показує, що для отримання порівняно стійких результатів потрібно не менше 8 елементів типу СЕ1. Виявилось, що при цьому значенні використання замість СЕ1 елементів з усередненими механічними і геометричними параметрами практично не впливає на величину максимальних переміщень (табл. 2),

дозволяючи в той же час значно скоротити обсяг обчислень. Так, час рахунку τ_2 , необхідний для розв'язання даної задачі на основі CE2, зменшується більше ніж в 1,6 рази у порівнянні з CE1.

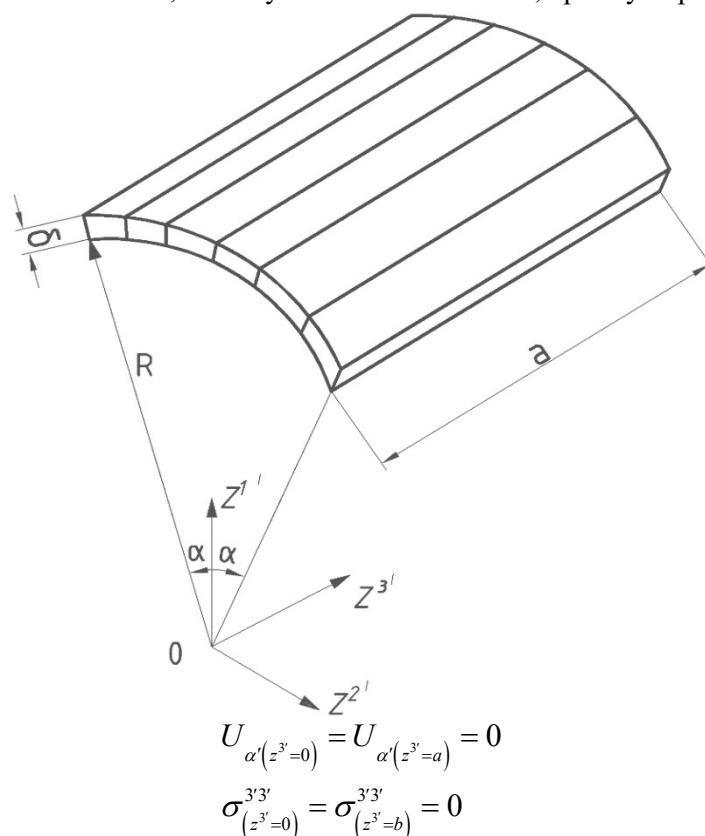


Рисунок 1 – Розрахункова схема циліндричної панелі
Figure 1 – Calculation scheme of a cylindrical panel

Таблиця 1 – Результати обчислень при різній кількості CE1 вздовж напрямуючої
Table 1 – Results of calculations with different number of FE1 along the guide

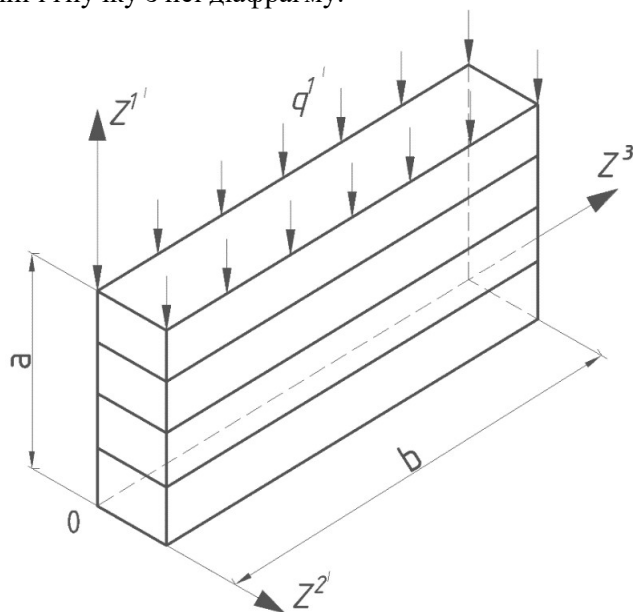
| M | $V_3 \cdot 10^2$ | % | V_1 | % |
|-----|------------------|-------|-------|------|
| 3 | 5,170 | 15,34 | 1,306 | 6,61 |
| 5 | 5,836 | 4,43 | 1,253 | 2,31 |
| 8 | 6,041 | 1,08 | 1,233 | 0,65 |
| 12 | 6,107 | - | 1,225 | - |

Таблиця 2 – Аналіз незначного (менше 1%) зменшення результатів
Table 2 – Analysis of a slight (less than 1%) decrease in results

| Вид CE | $V_3 \cdot 10^2$ | % | V_1 | % | τ_1/τ_2 |
|--------|------------------|------|-------|------|-----------------|
| CE1 | 6,041 | 0,00 | 1,233 | 0,08 | 1,61 |
| CE2 | 6,041 | | 1,234 | | |

Розрахункова схема нескінченної у напрямку Z^2 смуги приведена на рис.2. Розміри її поперечного перерізу в площині $Z^2 = const$ прийняті $a = 0,01$ м, $b = 2a$. Для моделювання умов плоскої деформації у напрямку Z^2 виділяється шар кінцевої товщини, закріплений від переміщень

$U_{2'}$. Граничні умови по торцях поперечного перерізу ($Z^{3'} = 0; Z^{3'} = b$) відповідають обпиранню на абсолютно жорстку в площині і гнучку з неї діафрагму.



$$U_{\alpha'(z^{3'}=0)} = U_{\alpha'(z^{3'}=b)} = 0$$

$$\sigma_{(z^{3'}=0)}^{3'3'} = \sigma_{(z^{3'}=b)}^{3'3'} = 0$$

Рисунок 2 – Розрахункова схема смуги
Figure 2 – Calculation scheme of the strip

Смуга знаходиться під дією рівномірно розподіленого по площині $Z^1' = a$ навантаження інтенсивністю $q^1' = 0,91\tau_s$, де τ_s - межа плинності при чистому зсуві. Модуль пружності матеріалу $E = 173\tau_s$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$ зміцнення відсутнє. У напрямку Z^2' приймався один скінченний елемент при утримання п'яти членів розкладання в ряди Фур'є. Максимальне значення відносних переміщень $V_{1'} = U_{1'}/a$ та $V_{3'} = U_{3'}/a$, обчислених при різній кількості СЕ1 по висоті поперечного перерізу елемента, наведені в табл. 3. Там же представлена у відсотках похибка цих переміщень по відношенню до результатів, отриманих при $M = 12$. Аналіз цих даних дозволяє зробити висновок, що для отримання стійких результатів потрібно не менше 8 елементів зі змінними механічними і геометричними параметрами. Незважаючи на розвиток області пластичних деформацій, які досягають рівня близько 1%, чисельні дослідження показали, що використання такої ж кількості СЕ2 призводить до незначного (менше 1%) зменшення результатів (табл. 4). При цьому спостерігається ще більше, ніж для пружної задачі скорочення часу виконання розрахунку.

Таблиця 3 – Результати обчислень при різній кількості СЕ1 по висоті поперечного перерізу елемента

Table 3 – The results of calculations with different amounts of FE1 on the height of the cross-section of the element

| M | $V_{3'}$ | % | $V_{1'}$ | % |
|-----|----------|------|----------|------|
| 2 | 0,914 | 22,4 | 1,909 | 14,8 |
| 4 | 1,092 | 7,3 | 2,107 | 6,0 |
| 8 | 1,162 | 1,3 | 2,216 | 1,1 |
| 12 | 1,178 | - | 2,241 | - |

Таблиця 4 – Аналіз незначного (менше 1%) зменшення результатів
 Table 4 – Analysis of a slight (less than 1%) decrease in results

| Вид СЕ | $V_{3'}$ | % | $V_{1'}$ | % | τ_1/τ_2 |
|--------|----------|-----|----------|-----|-----------------|
| СЕ1 | 1,162 | 0,7 | 2,216 | 0,9 | 1,82 |
| СЕ2 | 1,154 | | 2,195 | | |

Висновки

На основі проведених досліджень можна зробити висновок, що розроблена модифікація призматичного СЕ з усередненими механічними і геометричними параметрами дозволяє значно зменшити час розв’язання лінійних і нелінійних задач без зниження точності результатів.

Перелік посилань

1. Баженов В.А. Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим’юк – Київ: Вид-во “Каравела”, 2018. – 316с.
2. Баженов В.А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим’юк, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим’юк – Київ: Вид-во “Каравела”, 2021. – 280с.
3. Баженов В.А. Чисельне моделювання процесів нелінійного деформування тіл з урахуванням великих пластичних деформацій / В.А. Баженов, Ю.В. Максим’юк, І.І. Солодей, Р.Л. Стригун – Київ: Вид-во “Каравела”, 2019. – 223с.
4. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
5. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, О.С. Сахаров, І.І. Солодей– К. : КНУБА, 2012. – 248 с.
6. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : «Каравела», 2014. – 236 с.
7. Ворошко П.П. К построению разрешающих соотношений МКЭ для задач теории упругости. Сообщение 1. – Проблемы прочности, 1981, № 10, с.76-78.
8. Іванченко Г.М. Побудова розв’язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим’юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.
9. Максим’юк Ю. Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченого елемента на основі представлення переміщень поліномами / Ю. Максим’юк, О. Шкриль, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 9. – С. 54–62.
10. Максим’юк Ю. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим’юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим’юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108.
11. Максим’юк Ю.В. Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл / Ю.В Максим’юк, І.І. Солодей, Р.Л. Стригун // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 252–262.
12. Максим’юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В Максим’юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2015. – Вип. 94. – С. 244–251.

13. Максим'юк Ю.В. Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 96. – С. 148–157. 161

14. Постнов В.А., Черенков Н.И. Расчет осесимметричной деформации толстых оболочек вращения с помощью метода конечных элементов. – Сб. НТО Судпрома, 1970, вып 149, с.19-28.

15. Schultchen E., Ulonska H., Wurmnest W. Statische Berechnung von Rotationskörpern unter Beliebiger nichtrotations-symmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS – Rot. – Techn. Mitt. Krupp. Forsch., 1977, № 2, p.113-126.

16. Weese W. Berechnung nichtrotations symmetrisch belasteter Zylindrischer Körper auf der Grundlage der Fourierreihendarstellung nach der Methode der finite Elemente. – Wiss. Z. Techn. Hochsch, 1975, 18, 6-7, s.635-642

17. Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C. Plastic (of visco-plastic) behavior of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical finite element solution. – Tut. T. Num. Meth. Eng. USA, 1979, v.14, № 9, p.1399-1412.

PERFORMANCE OF FINITE ELEMENTS WITH VARIABLE AND AVERAGED MECHANICAL AND GEOMETRIC PARAMETERS OF THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD

Kuzminets Mykola P., doktor tekhnichnykh nauk, profesor, zaviduvach kafedroyu komp'yuternoyi, inzhenernoyi hrafiky ta dyzaynu, Natsional'nyy transportnyy universytet, Kyiv, Ukrayina, e-mail: kuzminecmp@ukr.net, tel. +380983600812, Ukrayina, 01103, m. Kyiv, vul. M. Boychuka, 40 A. <https://orcid.org/0000-0002-9636-919X>

Maksymyuk Yuriy V., doktor tekhnichnykh nauk, profesor, profesor kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyivskyy natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

Martyniuk Ivan Yu., kandydat tekhnichnykh nauk, doktorant kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyivskyy natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv <https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

Abstract. In the study of problems related to the development of numerical methods for the calculation of structures based on MSE, it is necessary to highlight the justification of the reliability of the obtained results and the comparison of the effectiveness of the approaches that are being developed in relation to the existing ones. Theoretically, it is not always possible to do this even for individual cases, because of this, as a rule, the data of numerical experiments obtained on control problems are involved in the solution of the mentioned questions. In this article, by solving specific problems, the efficiency of finite elements with variable and averaged mechanical and geometric parameters is compared and the convergence of Fourier series, polynomials and MSE is investigated. In addition, for a more complete justification of the reliability of the results obtained on the basis of the developed methodology and programs, a number of control examples covering massive and thin-walled objects were additionally considered in elastic and elastic-plastic settings.

Keywords. Finite element method (FEM), semi-analytical finite element method (FEM), prismatic finite element (FE1), massive, thin-walled prismatic bodies, vector of nodal reactions, stiffness matrix coefficients.

References

1. Bazhenov V.A. Finite element method in problems of deformation and destruction of bodies of rotation under thermoforce loading / V.A. Bazhenov, S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksymiuk - Kyiv: "Caravela" Publishing House, 2018. - 316 p. [in Ukrainian].

2. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finite elements in spatial problems of deformation, destruction and shape change of bodies of complex structure / V.A. Bazhenov, Yu.V. Maksymiuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk - Kyiv: "Caravela" publishing house, 2021. - 280 p. [in Ukrainian].

3. Bazhenov V.A. Numerical modeling of the processes of nonlinear deformation of bodies taking into account large plastic deformations / V.A. Bazhenov, Yu.V. Maksymiuk, I.I. Solodei, R.L. Strigun - Kyiv: "Caravela" Publishing House, 2019. - 223p. [in Ukrainian].

4. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finite elements in problems of destruction of spatial bodies: Monograph / V. A. Bazhenov, O.I. Gulyar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov - K.: KNUBA, 2005. - 298 p. [in Ukrainian].

5. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finite elements in problems of dynamics of spatial bodies: Monograph / V. A. Bazhenov, O.I. Gulyar, O.S. Sakharov, I.I. Solodei– K.: KNUBA, 2012. – 248 p. [in Ukrainian].
6. Bazhenov V. A. Semi-analytical method of finished elements in the problems of continual destruction of expanses of bodies: Monograph / V.A. Bazhenov, O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, O.S. Sakharov - K. : "Karavela", 2014. - 236 p. [in Ukrainian].
7. Voroshko P.P. To the construction of resolving relations of the FEM for problems of the theory of elasticity. Message 1. - Problems of Strength, 1981, No. 10, pp. 76-78. [in Russian].
8. Ivanchenko G.M. Construction of solving equations of semi-analytical method of finished elements of finished elements for prismatic bodies of complex share / G.M. Ivanchenko, Yu.V. Maksim'yuk, A.A. Kozak, I.Yu. Martinyuk // Management of development of folding systems: Nauk.-tekhn. sbirn. - K. : KNUBA, 2021 - Vip.46 - S. 55-62. [in Ukrainian].
9. Maksim'yuk Yu. Vuzlovi reactions and coefficients of the density matrix of the reduced element based on the representation of displacement by polynomials / Yu. Maksim'yuk, O. Shkrii, I. Martinyuk, V. Buchko // Budivelni konstruktsii teoriya i praktika. - 2021. - VIP. 9. – P. 54–62. [in Ukrainian].
10. Maksim'yuk Yu. Features of derivation of formulas for calculation of nodal reactions and coefficients of matrix of rigidity of a finite element with averaged mechanical and geometrical parameters / Yu. Maksim'yuk, A. Kozak, I. Martinyuk, O. Maksim'yuk // Budivelni konstruktsii teoriya i praktika. - 2021. - VIP. 8. – P. 97–108. [in Ukrainian].
11. Maksim'yuk Yu.V. Vihidni svivvidshenija neliniynogo dininaiy sformininini visesimetrichnyh i ploskodformivnih til / Yu.V Maksim'yuk, I.I. Solodey, R.L. Strigun // Opir materials and theory of spores - 2019. - VIP. 102. - S. 252-262. [in Ukrainian].
12. Maksim'yuk Yu.V. Rozrakhunkovi spivvidnenja universal skinchennogo elementa na osnovi i scheme skichenih elementiv / Yu.V Maksim'yuk // Opir materials and teoriya sporud - 2015. - Вип. 94. - S. 244-251. [in Ukrainian].
13. Maksim'yuk Yu.V. Clutch element of the head type for the decoupling of a weight-symmetric problem of non-stationary heat conduction / Yu.V Maksim'yuk // Opir materials and theory of spores - 2016. - Vip. 96. - S. 148-157. [in Ukrainian].
14. Postnov V.A., Cherenkov N.I. Calculation of axisymmetric deformation of thick shells of revolution using the finite element method. - Sat. NTO Sudprom, 1970, issue 149, pp. 19-28. [in Russian].
15. Schultchen E., Ulonska H., Wurmnest W. Statische Berechnung von Rotationskorpern unter Beliebiger nichtrotations-symmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS – Rot. – Techn. Mitt. Krupp. Forsch., 1977, № 2, p.113-126. [in English].
16. Weese W. Berechnung nichtrotations symmetrisch belasteter Zylindrischer Korper auf der Grundlage der Fourierreihendarstellung nach der Methode der finite Elemente. – Wiss. Z. Techn. Hochsch, 1975, 18, 6-7, s.635-642. [in English].
17. Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C. Plastic (of visco-plastic) behavior of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical finite element solution. – Tut. T. Num. Meth. Eng. USA, 1979, v.14, № 9, p.1399-1412. [in English].