УДК 004.4 **DOI: 10.33744/0365-8171-2022-112-241-247**
UDC 004.4

ПРО ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА НА ОСНОВІ МЕТОДУ ІМІТАЦІЇ ВІДПАЛУ

ON AN APPROACH TO THE SOLUTION OF THE FUZZY TRAVELING PROBLEM BASED ON THE REJECTION SIMULATION METHOD

Гавриленко Валерій Володимирович, *доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри інформаційних систем і технологій,* vvgavrilenko1953@gmail.com, *тел. +380503806406,*

https://orcid.org/0000-0001-9682-4204

Івохін Євген Вікторович, *доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, професор кафедри інформаційних систем і технологій,* ivohin.ntu@gmail.com, *тел. +380667098324,*

https://orcid.org/00-0002-5826-7408

Івохіна Катерина Євгенівна, *Національний транспортний університет, пошукач кафедри інформаційних систем і технологій,* ivohina@gmail.com, *тел. +380509252662,*

https://orcid.org/0000-0001-9940-1178

Рудоман Надія Володимирівна, *Національний транспортний університет, старший викладач кафедри інформаційних систем і технологій,* nadiiarudoman@ukr.net, *тел. +380979194705,*

https://orcid.org/0000-0002-7923-8649

Анотація. Робота присвячена дослідженню методу імітації відпалу для розв'язування нечіткої задачі комівояжера, яка формулюється як задача пошуку маршруту відвідування заданої кількості міст без повторень з мінімальною тривалістю пересування. Викладено зміст методу імітації відпалу, описано алгоритм формалізації методу. Наведено аксіоматику нечітких трикутних чисел. Сформульовано нечітку задачу комівояжера, у якій часові параметри пересування між містами задаються у вигляді правих нечітких чисел, величина носія в яких залежіть від різних зовнішніх умов та факторів. Наведено результати розрахунків розв'язків задачі комівояжера у чіткій та нечіткій формах з різними параметрами зрізів нечітких чисел.

Ключові слова: задача комівояжера, метод імітації відпалу, алгоритм, нечіткі числа, множини рівня, формалізація часових інтервалів.

Вступ. На сьогоднішній день проблема пошуку найкоротшого шляху між двома пунктами є дуже актуальною: обсяги та потреби транспортно-логістичних послуг зростають щодня. Їх головна мета – побудова найточнішого маршруту для обслуговування максимальної кількості клієнтів. При цьому необхідно враховувати, що вибір невдалого шляху спричиняє додаткові витрати, уникати яких дуже важливо як з економічної, так і логістичної точок зору.

При цьому, варто відмітити, що існує набір факторів, що характеризують тривалість проходження шляху: наприклад, час доби, погодні умови, і навіть «навантаженість» проходження тієї чи іншої ділянки. Причому, для пошуку оптимального шляху необхідно враховувати їх взаємозв'язок. Для прикладу, довільна ділянка шляху у різний час доби має різне завантаження, а це значить, що тривалість проходження цієї ділянки буде відрізнятися в залежності від часу проходження. З іншого боку, погодні умови (туман, дощ) також є чинниками впливу на тривалість проходження ділянки.

Метою даної роботи є дослідження підходів до розв’язування задачі комівояжера у випадку невизначеності факторів, що впливають на тривалість проходження окремих ділянок маршруту. Для формалізації невизначеності пропонується застосувати поняття нечітких чисел, що дозволяє розглянути задачі комівояжера у нечіткій постановці, для розв’язування якої використовується метод імітації відпалу.

1. Постановка задачі комівояжера (TSP, Travelling Salesman Problem)

Припустимо, що є представник торгівельної компанії, який хоче запропонувати або перевірити наявність товарів своєї фірми у пунктах продажу деякої сукупності міст конкретного регіону. Маршрут його руху повинен містити усі пункти, що прописані у завданні, причому, кожен з пунктів потрібно відвідати не більше одного разу. Такі подорожі забирають багато часу, тому логічно, що представник хоче скласти свій маршрут таким чином, щоб відстань, яку потрібно подолати, була мінімальною (в якості критерію може також розглядатися знаходження шляху мінімальної тривалості проходження або проходження з найменшими витратами). Пошук такого маршруту є основним завданням при розв’язуванні задачі комівояжера [1].

Задача комівояжера - комбінаторна задача, для розв’язання якої можуть бути використані методи математичного програмування. Щоб навести задачу до загального вигляду, пронумеруємо міста числами (*1, 2, 3, ..., n*), а маршрут комівояжера опишемо циклічною перестановкою номерів $t=(j_1, j_2, ..., j_n, j_1)$, причому усі $j_1, ..., j_n$ - різні номери. Номер j_1, який повторюється з початку й у кінці, показує, що перестановка є циклічною [2].

Сукупність міст можна розглядати у вигляді вершин деякого графу з заданими відстанями (або часом пересування) між усіма парами вершин c_{ij}, які утворюють матрицю $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$. Вважаємо матрицю симетричною. Тоді формальне завдання полягає у тому, щоб знайти найкоротший маршрут (за часом або довжиною) t , який проходить через кожне місто та закін-чується в точці відправлення. У такій постановці задача називається замкненою задачею комівояжера (TSP), яка є відомою задачею математичного цілочисельного програмування.

2. Математична модель задачі TSP

Нехай $I=\{1,...,n\}$ - множина індексів вершин графу задачі. Цільова функція – сумарний час проходження маршруту, що включає у себе усі вершини графа задачі. Параметрами задачі є елементи матриці $C=(c_{ij})$, $i, j \in I$.

Змінними задачі є елементи бінарної матриці переходів між вершинами $X = \{x_{ij}\}$, $i, j \in I$, які дорівнюють 1, якщо у побудованому маршруті для задачі присутнє ребро (v_i, v_j), 0 - інакше [3]. Оптимальним маршрутом будемо називати найкоротший за часом маршрут:

$$E = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, j \neq i} c_{ij} x_{ij} \to \min \quad (1)$$

з обмеженнями

$$\sum_{j\in I, j\neq i} x_{ij} = 1,\ i \in I\ ,$$

$$\sum_{i\in I, j\neq i} x_{ij} = 1,\ j \in I\ , \qquad (2)$$

$$v_i - v_j + nx_{ij} \le n-1,\ 1 \le i \ne j \le n\ .$$

Остання нерівність забезпечує зв'язність маршруту обходу вершин, він не може складатися з двох і більше незв'язаних частин.

Алгоритми, що дозволяють вирішити проблему знаходження оптимального маршруту, можна поділити на точні та евристичні. Для невеликих задач (наприклад, з метою первинного проектування транспортної мережі малих розмірів) доцільно використовувати точні алгоритми, оскільки їх реалізації необхідні високі обчислювальні потужності, чого не можна сказати про реальні завдання: для них, як правило, необхідно використовувати евристичні алгоритми. Одним з таких методів є метод імітації відпалу [4].

3. Метод імітації відпалу

Підхід, що реалізований у методі імітації відпалу, запозичений з фізичних процесів. В його основу покладено процес кристалізації речовини, який знайшли металурги для підвищення однорідності металу.

Як відомо, у металів є кристалічні решітки, що визначають геометричне положення атомів речовини. Сукупність позицій всіх атомів називатимемо станом системи, кожному стану відповідає певний рівень енергії. Мета відпалу – привести систему до стану з найменшою енергією. Чим нижчий рівень енергії, тим «краще» кристалічна решітка, тобто, тим менше у неї дефектів і міцніше метал.

У ході відпалу метал спочатку нагрівають до деякої температури, що змушує атоми кристалічної решітки залишити свої позиції. Потім починається повільне та контрольоване охолодження. Атоми прагнуть потрапити у стан із меншою енергією, проте, з певною ймовірністю вони можуть перейти й у стан із більшою енергією. Ця ймовірність зменшується разом із температурою. Перехід у гірший стан, як не дивно, допомагає в результаті знайти стан з меншою енергією, ніж початковий. Процес завершується, коли температура падає до заданого значення.

Така складна схема з ймовірностями переходу з точки у точку необхідна для того, щоб алгоритм не зациклювався на локальному мінімумі, приймаючи його за глобальний оптимум. Для виходу з такої ситуації потрібно час від часу підвищувати енергію системи. При цьому, загальна тенденція до пошуку найменшої енергії зберігається У цьому й є сутність методу імітації відпалу.

4. Алгоритм формалізації методу імітації відпалу

Для опису алгоритму введемо позначення:

S – множина усіх станів системи;

f(s) - функція зміни стану;

s_i - стан системи на *i-му* кроці;

s_k - новий стан (кандидат);

$t_{\min}$, t_i, $t_{\max}$ - мінімальна, поточна та вихідна температури відповідно;

T(t) - функція зміни температури;

E(s) - значення цільової функції.

Алгоритм починає працювати з вихідного стану s_1, початковою температурою $t_1 = t_{\max}$ і з заданою мінімальною температурою $t_{\min}$.

Для усіх номерів *i=1,2,…* поки $t_i > t_{\min}$ повторюємо:

1) $S_k = f(S_{i-1})$;

2) $\Delta E = E(S_k) - E(S_{i-1})$;

3) якщо $\Delta E < 0$, тоді $S_i = S_k$;

4) інакше прийняття нового стану відбувається з деякою ймовірністю $\exp(-\Delta E/t_i)$;

5) вибрати випадкове число M на інтервалі (0,1);

6) якщо $\exp(-\Delta E/t_i) > M$, виконати перехід $S_i = S_k$, інакше перейти до наступного кроку;

7) зменшити температуру t: $t_{i+1} = T(t_i)$;

8) повернути останній стан S_i, $i = i+1$.

Приклади розв’язування задачі комівояжера методом імітації відпалу наведено у [6].

Зрозуміло, що розв‘язання задачі комівояжера за критерієм найменшої тривалості проходження шляху на відміну від мінімізації його довжини може суттєво залежати від умов, які впливають на швидкість пересування за окремими ділянками маршруту.

Формалізуємо невизначеність, яка виникає внаслідок впливу об’єктивних факторів на час пересувань, за допомогою нечіткого підходу.

5. Аксіоматика нечітких чисел

Означення 1. [7] Нечітким трикутним числом $\tilde{b}$ називають впорядковану трійку чисел $\tilde{b} = \{(a,b,c)\}$, $a \le b \le c$, для якої визначено функцію належності $\mu_{\tilde{b}}(x) \in [0,1]$ вигляду:

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b];\ \mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c];\ \mu_{\tilde{b}}(x) = 0, x \notin [a,c]. \quad (3)$$

Нечіткі числа є частинним випадком нечітких множин [8], у яких величина функції належності для довільного елемента визначає ступінь його належності до нечіткої множини.

Нечітке трикутне число вигляду *(a, b, b)*, що називається лівим нечітким трикутним числом [7], визначається функцією належності вигляду

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x < a;\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b];\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x > b,$$

а нечітке трикутне число вигляду *(b, b, c)*, що називається правим нечітким трикутним числом, – функцією належності

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x < b;\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c];\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x > c.$$

Для нечіткого числа $\tilde{b}$ носієм supp $\tilde{b} = \{x \in X : \mu_{\tilde{b}}(x) > 0\}$ є інтервал [7]. При цьому, для нечіткого трикутного числа $\tilde{b} = (a,b,c)$ носієм буде інтервал (a, c), для правого нечіткого трикутного – інтервал $[b, c)$, для лівого нечіткого трикутного – інтервал $(a, b]$.

Множиною α–рівня (α–зрізом), $\alpha \in [0,1]$ нечіткого трикутного числа $\tilde{b} = (a,b,c)$ є звичайна множина (інтервал) $[\tilde{b}]_\alpha = \{x \in [a,c] : \mu_{\tilde{b}}(x) \ge \alpha\}, \alpha \in [0,1]$.

6. Математична модель нечіткої задачі TSP

Будемо вважати, що пересування за кожним з етапів шляху за звичайних умов може здійснюватись за час $b_{ij} \ge 0$, $i,j = \overline{1,n}$. Припустимо, що кожен етап шляху пересування можна розбити на окремі ділянки (наприклад, підйом, спуск, відрізок дорожніх ремонтних робіт, тощо), кількість яких позначатиме через $d_{ij} \ge 0,\ i,j = \overline{1,n}$. Відомо, що за звичайних умов переміщення по цих ділянках здійснюються за час $b_{ijk} \ge 0,\ k = \overline{1,d_{ij}},\ i,j = \overline{1,n}$.

З урахуванням інформації про стан шляхів між окремими пунктами транспортної мережі на початку розв'язування комівояжера оцінюємо час переміщення за усіма ділянками, який може бути меншим (ділянка долається швидше) $\underline{b_{ijk}} \ge 0,\ k = \overline{1,d_{ij}},\ i,j = \overline{1,n}$, або більшим (можливі затримки) $\overline{b_{ijk}} \ge 0,\ k = \overline{1,d_{ij}},\ i,j = \overline{1,n}$, за звичайний час.

Зрозуміло, що найменший час $\underline{b_{ijk}} \ge 0,\ k = \overline{1,d_{ij}},\ i,j = \overline{1,n}$, має бути обмежений правилами та можливостями руху, а найбільший $\overline{b_{ijk}} \ge 0,\ k = \overline{1,d_{ij}},\ i,j = \overline{1,n}$, - вважаємо кінцевим (тобто, варіант повної зупинки не розглядається).

За таких умов час пересування за окремими ділянками шляху можна описати нечіткими трикутними числами $\widetilde{b}_{ijk} = (\underline{b_{ijk}}, b_{ijk}, \overline{b_{ijk}}),\ k = \overline{1,d_{ij}},\ i,j = \overline{1,n}$, а параметри задачі, які задаються елементами матриці $C = (\widetilde{c}_{ij}),\ i,j = \overline{1,n}$, є нечіткими трикутними числами $\widetilde{c}_{ij} = \widetilde{b}_{ij} = (\underline{b_{ij}}, b_{ij}, \overline{b_{ij}})$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{d_{ij}} b_{ijk}$, $\underline{b_{ij}} = \sum_{k=1}^{d_{ij}} \underline{b_{ijk}}$, $\overline{b_{ij}} = \sum_{k=1}^{d_{ij}} \overline{b_{ijk}}$, $i,j = \overline{1,n}$, з лінійними функціями належності вигляду (3). Цільова функція задачі комівояжера набуває вигляд

$$E = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, j \ne i} \widetilde{c}_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{4}$$

яка разом з обмеженнями (2) є нечіткою оптимізаційною задачею [9], для розв'язання якої можна застосувати метод імітації відпалу.

Для реалізації методики розв'язання нечіткої задачі комівояжера скористаємось підходом, що базується на використанні множин рівня. Для цього шукаємо два окремі розв'язки, які відповідають найменшим та найбільшим значенням множин рівня нечітких параметрів, заданих матрицею *C*. Рівень надійності нечіткого розв'язку визначаємо величиною $\alpha \in [0,1]$, яка задає оцінку рівня впливу різних факторів на тривалість проходження ділянок маршруту. Такий підхід дозволяє для будь-яких нечітких чисел $\widetilde{c}_{ij},\ i,j = \overline{1,n}$, побудувати α–зрізи, які подаються у вигляді інтервалів часу, потрібних для подолання кожного з етапів маршруту пересування комівояжера.

Таблиця 1– Результати розрахунків для нечіткої задачі комівояжера.
Table 1 – Calculation results for the fuzzy salesman problem.

Значення параметра α \ Часовий \ інтервал	Min, год	Реальний час, год	Max, год
$\alpha = 1$	117	117	117
$\alpha = 0.75$	115	117	127
$\alpha = 0.5$	110	117	159
$\alpha = 0.25$	103	117	164

Застосовуючи метод імітації відпалу для крайніх значень цих інтервалів, розв'язуємо задачі комівояжера у найкращому та найгіршому випадках часу переміщення за маршрутом. За таких обставин отримуємо часовий інтервал, який надає оцінку значень критеріальної функції (4) для обраного параметра $\alpha \in [0,1]$. Мінімальне значення буде визначати час за ідеальних умов руху, максимальне – за умов врахування найбільшого впливу факторів, що погіршують тривалість проходження ділянок маршруту.

У табл.1 наведено результати розрахунків, отриманих при розв'язуванні задачі комівояжера для різних значень параметра $\alpha \in [0,1]$.

Висновки

В даній роботі розглянуто метод імітації відпалу для розв'язання нечіткої задачі комівояжера, яка формулюється як задача пошуку маршруту відвідування заданої кількості міст без повторень з мінімальною тривалістю пересування. Викладено зміст методу імітації відпалу, описано алгоритм формалізації методу. Сформульовано нечітку задачу комівояжера, у якій часові параметри пересування між містами задаються у вигляді правих нечітких чисел, величина носія в яких залежіть від різних зовнішніх умов та факторів. Наведено результати розрахунків розв'язків задачі комівояжера у чіткій та нечіткій формах з різними параметрами зрізів нечітких чисел.

Перелік посилань

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій/ К.: Видавничий дім «Слово», 2006. – 816с.
2. Гребеннік І.В. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями/ І.В.Гребеннік, О.С.Чорна, Е.Е.Макарова // *Системи управління, навігації та зв'язку*. - 2018. - №3(49). - С.67-72.
3. Rai S. and Ettam R. K. Simulation-based optimization using simulated annealing for optimal equipment selection within print production environments// *Winter Simulations Conference (WSC)*, 2013. - Pp. 1097-1108.
4. Костенко О.М. Синтез оптимальних комбінаторних планів багатофакторного експерименту/ О.М.Костенко // *Вісник Полтавської державної аграрної академії*. – 2016. - №1-2. – С.62-71.
5. Нємцов М.В. Дослідження методів оптимізації, які використовуються у компіляторах коду / М.В.Нємцов, В.І. Каук //[Online] – *International Electronic Scientific Journal "Science Online"*. Available from: http://nauka-online.com/.
6. Гавриленко В.В. Про застосування методу імітації відпалу для розв'язання нечіткої задачі комівояжера / В.В. Гавриленко, К.Є. Івохіна, Н.В. Рудоман // *Системи управління, навігації та зв'язку*. - 2022. - №3. - С.77-82.
7. Bablu Jana and Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model // *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*. – 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268.
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets // *Inf. Contr.* - 1965. - V.8. - P. 308-353.
9. Zimmermman, H. J. Application of Fuzzy Set Theory To Mathematical Programming // *Information Sciences*. - 1985. – 36. – P. 25-58.

ON THE APPLICATION OF THE SIMULATED ANNEALING METHOD FOR SOLVING THE FUZZY TRAVELING SALESMAN PROBLEM

Gavrilenko Valeriy V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Transport University, Head of the Department of Information Systems and Technologies, vvgavrilenko1953@gmail.com, tel. +380503806406, https://orcid.org/0000-0001-9682-4204

Ivohin Eugene V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Transport University, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, ivohin.ntu@gmail.com, tel. +380667098324, https://orcid.org/00-0002-5826-7408

Ivokhina Kateryna E., National Transport University,post- graduate student of the Department of Information Systems and Technologies, ivohina@gmail.com, tel. +380509252662, https://orcid.org/0000-0001-9940-1178

Rudoman Nadiia V., National Transport University, senior lecturer of the Department of Information Systems and Technologies, nadiiarudoman@ukr.net, tel. +380979194705, https://orcid.org/0000-0002-7923-8649

Abstract. This article discusses the annealing simulation method for solving the fuzzy traveling salesman problem, which is formulated as the problem of finding a route to visit a given number of cities without repetitions with a minimum travel time. The content of the annealing simulation method is presented, the method formalization algorithm is described. The axiomatics of fuzzy triangular numbers are given. A fuzzy traveling salesman problem is formulated, in which the time parameters of movement between cities are given in the form of right fuzzy numbers, the carrier value in which depends on various external conditions and factors. The results of calculations for solving the traveling salesman problem in clear and fuzzy forms with different parameters of slices of fuzzy numbers are presented.

Key words: traveling salesman problem, simulated annealing method, algorithm, fuzzy numbers, level set, formalization of time intervals.

References

1. Zaychenko YU.P. Doslidzhennya operatsiy / K.: Vydavnychyy dim «Slovo», 2006. – 816 s. [in Ukrainian].
2. Hrebennik I.V. Optymizatsiya liniynykh funktsiy na mnozhyni tsyklichnykh perestanovok z liniynymy obmezhennyamy / I.V. Hrebennik, O.S. Chorna, E.E. Makarova // Systemy upravlinnya, navihatsiyi ta zv″yazku. – 2018. – №3(49). – S.67-72. [in Ukrainian].
3. Rai S. and Ettam R.K. Simulation-based optimization using simulated annealing for optimal equipment selection within print production environments// *Winter Simulations Conference (WSC)*, 2013. – PP.1097-1108. [in English].
4. Kostenko O.M. Syntez optymal′nykh kombinatornykh planiv bahatofaktornoho eksperymentu / O.M. Kostenko // Visnyk Poltavs′koyi derzhavnoyi ahrarnoyi akademiyi. – 2016. – №1-2. – S.62-71. [in Ukrainian].
5. Nyemtsov M.V. Doslidzhennya metodiv optymizatsiyi, yaki vykorystovuyut′sya u kompilyatorakh kodu / M.V. Nyemtsov, V.I. Kauk //[Online] – International Electronic Scientific Journal "Science Online". Available from: http://nauka-online.com/. [in Ukrainian].
6. Havrylenko V.V. Pro zastosuvannya metodu imitatsiyi vidpalu dlya rozv″yazannya nechitkoyi zadachi komivoyazhera / V.V. Havrylenko, K.YE. Ivokhina, N.V. Rudoman // Systemy upravlinnya, navihatsiyi ta zv″yazku. – 2022. – №3. – S.77-82. [in Ukrainian].
7. Bablu Jana and Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model // *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*. – 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268. [in English].
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets // *Inf. Contr.* – 1965. – V.8. – P.308-353. [in English].
9. Zimmermman, H. J. Application of Fuzzy Set Theory To Mathematical Programming // *Information Sciences*. – 1985. – 36. – P.25-58. [in English].