

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ ЗА ПРИСУТНОСТІ МІЖ
НИМИ ЖОРСТКОГО ПЛОСКОГО ВКЛЮЧЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ**

**MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF THE CONTACT INTERACTION
OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC ELASTIC HALF-SPACES IN THE PRESENCE OF A RIGID
FLAT INCLUSION BETWEEN THEM**



Кирилюк Віталій Семенович, доктор фізико-математичних наук, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, провідний науковий співробітник, відділ теорії коливань, e-mail: kirilyuk_v@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8513-0378>



Левчук Ольга Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, старший науковий співробітник, відділ теорії коливань, e-mail: 2013levchuk@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-6514-622>



Гавриленко Валерій Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри інформаційних систем і технологій, факультет транспортних та інформаційних технологій, e-mail: v_gavr@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0001-9682-4204>



Вітер Михайло Богданович, кандидат фізико-математичних наук, Національний транспортний університет, доцент, професор кафедри інформаційних систем та технологій, факультет транспортних та інформаційних технологій, e-mail: mbviter@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4109-005X>

Анотація. Проведено математичне та комп'ютерне моделювання контактної взаємодії двох різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за присутності жорсткого плоского включення між ними при стисканні. На основі представлення загального розв'язку системи рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного тіла через гармонійні функції встановлена відповідність між параметрами контактної взаємодії для двох трансверсально-ізотропних та двох ізотропних пружних півпросторів (за присутності між ними жорсткого плоского включення довільної форми), що узагальнює результат Гладвела на випадок взаємодії трансверсально-ізотропних півпросторів. На основі математичного та комп'ютерного моделювання досліджено контактну взаємодію трансверсально-ізотропних півпросторів з дископодібним включенням. Проведено аналіз числових результатів, вивчено вплив пружних властивостей півпросторів, геометричних розмірів включення на параметри контактної взаємодії.

Ключові слова: математичне та комп'ютерне моделювання, трансверсально-ізотропний матеріал, пружний півпростір, жорстке плоске включення, довільна форма, параметри контакту.

Вступ. У різних галузях промисловості при створенні елементів конструкцій широко застосовуються біматеріали, складові яких мають різні фізичні властивості, в тому числі анізотропні. Це, у свою чергу, стимулює інтерес до вивчення і аналізу розподілу напружень у таких тілах поблизу концентраторів напружень, а також при їх контактній взаємодії. У той же час, розв'язання просторових задач теорії пружності для анізотропних тіл ускладнюється, оскільки у цьому випадку необхідно розв'язувати граничну задачу для системи рівнянь рівноваги анізотропного тіла, яка має суттєво складнішу структуру (у порівнянні з відповідною системою для ізотропного пружного тіла).

Контактна взаємодія трансверсально-ізотропних тіл зі штампами та між собою досліджувалась у ряді робіт, серед яких можна виділити статті [1-7]. Так робота [1] містить цікаві результати стосовно контакту трансверсально-ізотропних тіл за наявності адгезії, робота [2] – стосовно тангенціальних навантажень на штамп при контакті з півпростором, у статті [3] вивчено контактну взаємодію півпростора зі штампом еліптичного перерізу. У роботі [4] розглянуто контактну задачу трансверсально-ізотропного півпростору зі штампом за довільної орієнтації поверхні півпростору відносно осі симетрії матеріалу, у роботі [8] – контактну взаємодію при розкритті плоскої тріщини дископодібним включенням у трансверсально-ізотропному просторі, робота [6] містить результати досліджень розподілу напружень у трансверсально-ізотропному півпросторі про лінійно-змінному тиску на ділянках поверхні півпростору, у статті дано огляд низки задач контактної взаємодії для трансверсально-ізотропних тіл.

Важливим результатом стосовно контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів, між якими розташоване плоске дископодібне включення, отримано у роботі Selvadurai [7] (знайдено у явному вигляді розподіл контактної тиску під включенням та значення заглиблень у кожному півпросторі). В подальшому, цей результат було узагальнено в роботі Гладвела [10], в якій встановлено загальні закономірності розподілу контактних напружень та переміщень у кожному з півпросторів для плоского включення *довільної форми*.

У даній роботі на основі математичного та комп'ютерного моделювання результат Гладвела [10], стосовно контакту пружних ізотропних півпросторів узагальнено на випадок контактної взаємодії двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів при наявності плоского включення *довільної форми* між ними. Встановлені загальні закономірності у розподілі контактних напружень та переміщень на границі поділу пружних півпросторів. За допомогою комп'ютерного моделювання досліджено параметри контактної взаємодії дископодібного плоского включення, розміщеного на міжфазній границі двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів.

Постановка задачі. Розглянемо математичну модель, на основі якої вивчимо контактну взаємодію двох різних за властивостями трансверсально-ізотропних пружних півпросторів за наявності жорсткого плоского включення сталої товщини між ними (рис. 1)

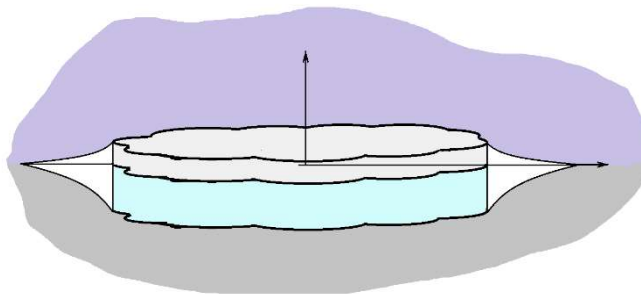


Рисунок 1 – Контактна взаємодія двох пружних півпросторів за наявності жорсткого плоского включення між ними.

Figure 1– Contact interaction of two elastic half-spaces in the presence of a rigid flat inclusion between them

Припускаємо, що площина $z = 0$ (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії трансверсально-ізотропних матеріалів кожного з півпросторів, тобто вісь Oz є віссю симетрії обох

трансверсально-ізотропних матеріалів. Також вважаємо, що у площині контактної взаємодії $z = 0$ виконуються умови гладкого (без тертя) контакту пружних тіл. Розміри області розшарування двох пружних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються у процесі розв'язання задачі. Параметри контактної взаємодії пружних тіл залежать від значення стискаючих зусиль p , пружних властивостей двох трансверсально-ізотропних півпросторів (всього десять незалежних величин) і геометричних параметрів жорсткого включення.

Для визначення напружено-деформованого стану у кожному з трансверсально-ізотропних пружних півпросторів на поверхні поділу тіл (площині $z = 0$) отримуємо наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)}(x, y, 0) &= \Delta_1, (x, y) \in \Omega_1; \\ \sigma_z^{(1)}(x, y, 0) &= 0, (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, 0) = \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, 0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, 0) = 0, (x, y) \in R^2; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(2)}(x, y, 0) &= -\Delta_2, (x, y) \in \Omega_1; \\ \sigma_z^{(2)}(x, y, 0) &= 0, (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sigma_z^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_z^{(2)}(x, y, 0), R^2 \setminus \Omega_2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(1)}(x, y, 0) &= u_z^{(2)}(x, y, 0), R^2 \setminus \Omega_2; \\ \Delta_1 + \Delta_2 &= \Delta, \end{aligned} \quad (3)$$

де індекси «1» і «2» відповідають першому і другому півпросторам, Δ - товщина жорсткого плоского включення, Δ_1 і Δ_2 - глибини проникнення включення у відповідні півпростори, Ω_1 - плоска область, що утворена перетином включення з площиною $z=0$, а Ω_2 відповідає зоні розшарування між півпросторами на міжфазній границі $z=0$ (охоплює область Ω_1). З наведених граничних умов у площині поділу умови (1) відповідають умовам відсутності дотичних напружень на всій поверхні поділу, умови (2), (3) – умовам ідеального механічного контакту поза зоною розшарування матеріалу. Крім того, маємо наступні умови на нескінченності:

$$\sigma_{zz}^{(1)} \rightarrow p \text{ (при } z \rightarrow \infty \text{)} \text{ та } \sigma_{zz}^{(2)} \rightarrow p \text{ (при } z \rightarrow -\infty \text{)}.$$

Представимо напружений стан у кожному з пружних півпросторів суперпозицією основного стану (простого стискання $\sigma_{zz}^{(1)} = -p$ та $\sigma_{zz}^{(2)} = -p$) та збуреного стану. Для знаходження збуреного стану у кожному з півпросторів у площині $z = 0$ маємо наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)}(x, y, 0) &= \Delta_1, (x, y) \in \Omega_1; \\ \sigma_z^{(1)}(x, y, 0) &= p, (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, 0) = \sigma_{xz}^{(2)}(x, y, 0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, 0) = 0, (x, y) \in R^2; \\ u_z^{(2)}(x, y, 0) &= -\Delta_2, (x, y) \in \Omega_1; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(2)}(x, y, 0) &= p, (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sigma_z^{(1)}(x, y, 0) &= \sigma_z^{(2)}(x, y, 0), R^2 \setminus \Omega_2;\end{aligned}\quad (5)$$

$$u_z^{(1)}(x, y, 0) = u_z^{(2)}(x, y, 0), R^2 \setminus \Omega_2;\quad (6)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Умови (4), (5), (6) мають той же зміст, що й умови (1), (2), (3), але для збуреного стану. Для того, щоб дослідити задачу на основі строгої математичної моделі, яка використовується, необхідно знайти розв'язки рівнянь теорії пружності у кожному з трансверсально-ізотропних півпросторів, що задовольняють наведеним вище граничним умовам на поверхні поділу матеріалів.

Основні рівняння і співвідношення. Статичні рівняння теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла у переміщеннях приймають вигляд [11]

$$\begin{aligned}c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= 0; \\ \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= 0; \\ c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= 0;\end{aligned}\quad (7)$$

де $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{44}$ - незалежні пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу. Розв'язок системи рівнянь (7) згідно [11] можна виразити через три потенціальні функції Φ_i ($i = 1, 2, 3$) наступним чином:

$$\begin{aligned}u_x &= \partial \Phi_1 / \partial x + \partial \Phi_2 / \partial x + \partial \Phi_3 / \partial y; \\ u_y &= \partial \Phi_1 / \partial y + \partial \Phi_2 / \partial y - \partial \Phi_3 / \partial x; \\ u_z &= m_1 \partial \Phi_1 / \partial z + m_2 \partial \Phi_2 / \partial z,\end{aligned}\quad (8)$$

де Φ_1, Φ_2, Φ_3 - функції, що входять до системи (8), задовольняють рівнянням

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + v_j \partial^2 / \partial z^2) \Phi_j = 0,\quad (9)$$

а також $v_3 = 2c_{44} / (c_{11} - c_{12})$; v_1, v_2 - корені квадратного рівняння

$$c_{11} c_{44} v^2 - [c_{44}^2 + c_{33} c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2] v + c_{33} c_{44} = 0,\quad (10)$$

$$m_j = \frac{c_{11} v_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{v_j (c_{13} + c_{44})}{c_{33} - v_j c_{44}} \quad (j = 1, 2).\quad (11)$$

При введенні позначень $z_j = z v_j^{-1/2}$ ($j = 1, 2, 3$), використовуючи вирази (9)-(11), легко встановити, що функції $\Phi_1(x, y, z_1), \Phi_2(x, y, z_2), \Phi_3(x, y, z_3)$ будуть гармонічними функціями у відповідній системі координат (x, y, z_i) .

В подальшому скористаємось позначеннями

$$k_1 = m_1 = \frac{c_{11}v_1 + c_{44}}{c_{13} + c_{44}} - 1; \quad k_2 = m_2 = \frac{c_{11}v_2 + c_{44}}{c_{13} + c_{44}} - 1; \quad a_j = c_{44}(1+m_j) \quad (j = 1,2). \quad (12)$$

Метод розв'язання. При побудові розв'язку граничної задачі теорії пружності скористаємося представленням (8), виразами (9)-(12). Функції $\phi_i(x, y, z_i)$ (для кожного трансверсально-ізотропного півпростору з врахуванням властивостей матеріалу) візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_i^* F_i^*(x, y, z_i), \quad (i = 1, 2); \quad \Phi_3 \equiv 0. \quad (13)$$

Сталі α_i^* у виразах потенціальних функцій (13) визначимо з наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \alpha_j^* (c_{44}(1+k_j)) = 1; \quad \sum_{j=1}^2 \alpha_j^* (c_{44}(1+k_j)) / \sqrt{v_j} = 0. \quad (14)$$

При визначенні сталих α_i^* згідно системи (14) задовольняються граничні умови по дотичним напруженням вздовж всієї поверхні поділу для трансверсально-ізотропного півпростору, а також умови рівності нормальних компонентів напружень поза зоною розшарування матеріалів. Для граничних умов, що залишилися, використовуючи потенціальні функції на основі функцій $F_1^*(x, y, z_i)$ і $F_2^*(x, y, z_i)$ (функції для першого та другого пружних півпросторів) з врахуванням системи рівнянь (14), отримуємо умови у площині $z = 0$ стосовно невідомих гармонічних функцій $F_1^*(x, y, z)$ і $F_2^*(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z}(x, y, 0) &= \Delta_1, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(x, y, 0) = p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(x, y, 0) &= -\Delta_2, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(x, y, 0) = p, \quad (x, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1; \\ \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z}(x, y, 0) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2; \\ \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(x, y, 0) &= \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(x, y, 0), \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega_2, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо для порівняння більш просту задачу теорії пружності про стискання двох пружних ізотропних півпросторів, між якими розташоване жорстке дископодібне включення сталої товщини. За допомогою представлення Папковича - Нейбера визначення зони розшарування стосовно збуреного стану зводиться до пошуку двох гармонічних функцій $f_1^*(x, y, z)$ і $f_2^*(x, y, z)$, для знаходження яких отримуємо у площині поділу матеріалів $z = 0$ граничні умови, що структурно повністю подібні наведеним формулам (15). Єдина відмінність полягає у тому, що у цих виразах (для ізотропних матеріалів) замість множників $\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}$ і $\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}$ використовуються вирази

$(1 - \nu_1) / \mu_1$ і $(1 - \nu_2) / \mu_2$, де ν_1, ν_2 - коефіцієнти Пуассона, а μ_1, μ_2 - модулі зсуву для ізотропних матеріалів пружних півпросторів. Порівнюючи відповідні вирази контактних напружень і переміщень під плоским жорстким включенням довільної форми для ізотропних і трансверсально-ізотропних півпросторів, виражені через гармонічні функції, встановлюємо, що для плоского включення **довільної форми**, що перебуває у контакті з двома різними за властивостями трансверсально-ізотропними півпросторами, згідно результатам [7] мають місце наступні закономірності:

1. переміщення Δ_1 та Δ_2 пов'язані співвідношенням

$$\Delta_1 / \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{\nu_j^{(1)}} \right) = \Delta_2 / \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{\nu_j^{(2)}} \right);$$

2. контактні напруження на кожній стороні включення є тотожними;
3. нормальні переміщення в області, де півпростори контактують (поза зоною розшарування), є не тільки рівними, але й дорівнюють нулю.

Виходячи з такої відповідності граничних задач контактної взаємодії двох ізотропних та двох трансверсально-ізотропних півпросторів перейдемо до випадку плоского дископодібного включення, який дозволяє отримати аналітичний розв'язок задачі. За допомогою результатів [9] для двох пружних ізотропних тіл (за наявності дископодібного включення) та встановленої відповідності задач контактної взаємодії у випадку двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) задачу зводимо до розв'язку інтегрального рівняння відносно невідомого значення $c = b / a$ (відношення розміру невідомої області розшарування до радіуса жорсткого кругового включення). Отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)} \left(\eta \ln \left[\frac{c - \eta}{c + \eta} \right] - \xi \ln \left[\frac{c - \xi}{c + \xi} \right] \right) d\xi = \\ = \frac{\Delta}{ap(1 + \alpha) \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{\nu_j^{(1)}}}} + \frac{2}{\pi} (1 - \eta^2) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c^2 - 1}{1 - \eta^2} \right), \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (16)$$

з додатковою умовою, що характеризує відсутність сингулярної складової напружень вздовж зовнішнього контуру зони розшарування матеріалів при $r = b$

$$\begin{aligned} \frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(c^2 - \xi^2)} d\xi + (c^2 - 1)^{1/2} = 0, \\ \text{де } \eta = r / a, \quad c = b / a, \quad \alpha = \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{\nu_j^{(2)}}} \right) / \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{\nu_j^{(1)}}} \right). \end{aligned}$$

Далі, на основі розкладу за малим параметром $\varepsilon = a / b = 1 / c < 1$ шуканої функції, що входить до інтегрального рівняння (16) (аналогічно контакту двох пружних ізотропних півпросторів [9]), наближений розв'язок інтегрального рівняння з додатковою умовою може бути отримано за допомогою розв'язку алгебраїчного рівняння п'ятого порядку

$$\frac{W_1(\varepsilon)}{(1 + \alpha)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) - 2p \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{\nu_j^{(1)}}} \right) \frac{W_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad (17)$$

де використано позначення

$$\begin{aligned}
 W_1(\varepsilon) &= \frac{4}{\pi} \varepsilon + \frac{16}{\pi^3} \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^5} + \frac{4}{3\pi} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{80}{9\pi^3} + \frac{256}{\pi^7} \right) + \varepsilon^5 \left(\frac{448}{9\pi^5} + \frac{1024}{\pi^9} + \frac{4}{5\pi} \right) + O(\varepsilon^6), \\
 W_2(\varepsilon) &= 1 - \frac{4}{\pi^2} \varepsilon - \frac{16}{\pi^4} \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^6} + \frac{1}{8} \right) - \varepsilon^4 \left(\frac{16}{3\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{8}{9\pi^2} + \frac{64}{\pi^6} + \frac{4}{9\pi^3} \right) \right) - \\
 &\quad - \varepsilon^5 \left(\frac{16}{\pi^4} \left(\frac{1}{24} + \frac{64}{\pi^6} - \frac{8}{9\pi^3} + \frac{8}{9\pi^2} \right) + \frac{256}{9\pi^6} - \frac{4}{15\pi^2} \right) + O(\varepsilon^6). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Знайдене з алгебраїчного рівняння (17), враховуючи формули (18), значення $\varepsilon = a / b$ визначає розміри зони розшарування між двома трансверсально-ізотропними пружними півпросторами (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними) при стисканні. Розміри заглиблення включення у відповідний трансверсально-ізотропний півпростір визначаються співвідношенням

$$\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right)} \Delta_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \Delta_2,$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

З формул (17) отримуємо співвідношення, що пов'язує значення стискаючих навантажень p із розміром зони розшарування між півпросторами у вигляді

$$p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon W_1(\varepsilon) / W_2(\varepsilon)}{\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon W_1(\varepsilon) / W_2(\varepsilon)}{N^*} \left(\frac{\Delta}{a} \right), \quad (19)$$

де

$$N^* = \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right). \quad (20)$$

За допомогою виразів (19), (20) можуть бути знайдені значення навантажень p , що для відомих геометричних параметрів дископодібного включення, пружних властивостей трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів відповідає фіксованому розміру зони розшарування трансверсально-ізотропних півпросторів.

Перетворимо вирази, що входять до формул (19), (20), для більш зручного їх використання. Для цього скористаємось формулами (10)-(12). В результаті маємо

$$\begin{aligned}
 A^{Trans} &= \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = \frac{\frac{a_2}{\sqrt{v_2}} \frac{m_1}{\sqrt{v_1}} - \frac{a_1}{\sqrt{v_1}} \frac{m_2}{\sqrt{v_2}}}{\Delta} = \frac{(-a_1 m_2 + a_2 m_1) \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}}}{\frac{a_1 a_2}{\sqrt{v_2}} - \frac{a_1 a_2}{\sqrt{v_1}}} = \frac{-m_2 + m_1}{\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2}} = \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})} \left[\frac{-m_2}{c_{44}(1+m_2)} + \frac{m_1}{c_{44}(1+m_1)} \right] = \frac{1}{c_{44}(v_1^{1/2} - v_2^{1/2})} \left[\frac{m_1 - m_2}{(1+m_1)(1+m_2)} \right] = \\
 &= \frac{c_{11}}{c_{44}} \frac{(v_1^{1/2} + v_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{(c_{11} v_1 + c_{13})(c_{11} v_2 + c_{13})}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

При переході від трансверсально-ізотропного до ізотропного матеріалу отримуємо

$$c_{11} = \lambda + 2\mu; c_{13} = \lambda; c_{44} = \mu; \nu_1 = \nu_2 = 1;$$

$$A^{Iso} = \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

Відзначимо, що в результаті подальших перетворень виразу (21) (з використанням теореми Вієта) згідно [5] маємо

$$A^{Trans} = \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}} = \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\sqrt{c_{44}}} \left[\sqrt{c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}c_{13} + 2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \right]. \quad (22)$$

Знайдений вираз (22), на відміну від формули (21), дозволяє одразу знаходити шукане значення безпосередньою підстановкою у нього пружних сталей трансверсально-ізотропного матеріалу, не знаходячи попередньо корені квадратного рівняння (9).

Відзначимо, що у кутовій зоні жорсткого плоского включення (вздовж контуру $r = a$) має місце сингулярність напруженого стану, яка є характерною для задач контактної взаємодії плоских жорстких штампів з пружним півпростором, в той же час вздовж контуру зони розшарування двох півпросторів напруження не містять сингулярної складової (саме з цієї умови і визначаються розміри зони розшарування матеріалів).

Аналіз результатів числових досліджень.

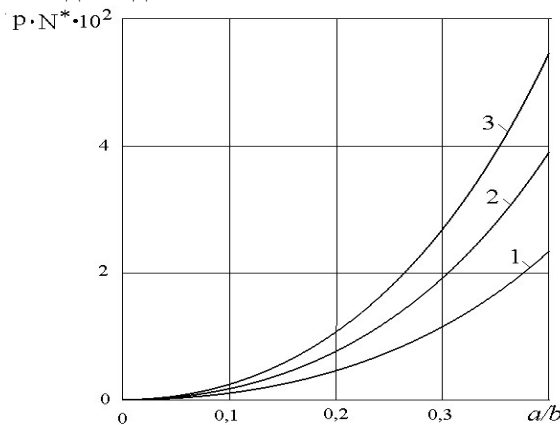


Рисунок 2 – Зв'язок діючих навантажень з розмірами зони розшарування

Figure 2 – Relationship between active loads and the dimensions of the delamination zone

На рис. 2 відображено зв'язок діючих навантажень з розмірами області розшарування (при фіксованому відношенні товщини включення до її радіусу Δ/a). При розрахунках значення Δ/a покладались рівними 0,15 (лінія 1), 0,25 (лінія 2), 0,35 (лінія 3). Видно, що при збільшенні відносної товщини кругового включення для досягнення того ж розміру зони розшарування, що і для більш тонкого включення, необхідно прикласти більше навантаження.

Відзначимо, що отримані результати контактної взаємодії дають можливість знайти розв'язок задачі при контакті трансверсально-ізотропного пружного півпростору з ізотропним пружним півпростором (за наявності жорсткого дископодібного включення між ними). Тоді у формулах (20) вираз N^* потрібно замінити значенням $N^{TRANS.-ISO}$, де

$$N^{TRANS.-ISO} = \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{\nu_j^{(1)}}} \right) + \frac{(1 - \nu_2)}{\mu_2},$$

ν_2, μ_2 - коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву ізотропного пружного півпростору.

Проведемо дослідження відношень Δ_2/Δ_1 (відношення глибин проникнення жорсткого включення у пружні півпростори) для реальних трансверсально-ізотропних матеріалів. Використаємо

дані [8] стосовно пружних властивостей різних матеріалів. Номери, за якими трансверсально-ізотропні матеріали подані у таблиці, будемо використовувати для позначень параметрів контакту півпросторів з цих матеріалів.

Таблиця 1 – Пружні властивості трансверсально-ізотропних матеріалів
Table 1 – Elastic properties of transversally isotropic materials

T	Матеріал	c_{11} , ГПа	c_{33} , ГПа	c_{44} , ГПа	c_{12} , ГПа	c_{13} , ГПа
1	Be	292.3	336.4	162.5	26.7	14.0
2	C (graphite)	1160.0	46.6	2.3	290.0	109.0
3	Cd	115.8	51.4	20.4	39.8	40.6
4	Co	307.0	358.1	78.3	165.0	103.0
5	Hf	181.1	196.9	55.7	77.2	66.1

В результаті проведених досліджень отримуємо наступні відношення глибин проникнення жорсткого дископодібного включення у трансверсально-ізотропні матеріали:

$$\Delta_2 / \Delta_1 = 18.218 ; \Delta_3 / \Delta_1 = 6.97\% ; \Delta_4 / \Delta_1 = 1.213 ; \Delta_5 / \Delta_1 = 202\%$$

Тобто глибина проникнення жорсткого включення у матеріал 1 у 18.2 менша, ніж у матеріал 2 (при контакті півпросторів з цих матеріалів), а також у 6.97 менша, ніж у матеріал 3 (при контакті півпросторів з матеріалів 1 і 3) і т.д. Наведені значення дозволяють легко знайти відносні глибини проникнення для будь-якої вибраної пари з наведених у таблиці матеріалів.

Висновок. У роботі проведено математичне та комп'ютерне моделювання контактної взаємодії двох трансверсально-ізотропних пружних півпросторів при стисканні (за наявності жорсткого плоского включення між ними), узагальнено результат Гладвелла на випадок трансверсально-ізотропних півпросторів з плоским включенням довільної форми між ними. Для дископодібного включення проведено числові розрахунки, досліджено вплив властивостей матеріалів, відносної товщини жорсткого включення та силових навантажень на розміри зони розшарування.

Перелік посилань

1. Borodich F.M. [The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids](#) / Borodich F.M., Galanov B.A., Keer L.M., Suarez-Alvarez M.M. // *Mechanics of Materials*. 2014. 75, P. 34-44.
2. Chai Y.S. [Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies](#) / Chai Y.S., Argatov I.I. // *Meccanica*. 2018. 53, № 11-12. P. 3137-3143.
3. Davtyan D.B. [Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space](#) / Davtyan D.B., Pozharskii D.A. // *Mechanics of Solids*. 2014. 49, № 5. P. 578-586.
4. Fabrikant V.I. [Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space](#) / Fabrikant V.I. // *Acta Mechanica*. 2017. 228, № 4. P. 1541-1560.
5. Kirilyuk V.S. [Stress state of a piezoceramic body with a plane crack opened by a rigid inclusion](#) / Kirilyuk V.S. // *Int. Appl. Mech.* 2008. 44, № 7. P. 757-768.
6. Marmo F. [Analytical formulas and design charts for transversely isotropic half-spaces subject to linearly distributed pressures](#) / Marmo F., Toraldo F., Rosati L. // *Meccanica*. 2016. 51, № 11. P. 2909-2928.
7. Podil'chuk Yu.N. Exact analytic solutions of three-dimensional boundary-value problems of the statics of a transversely isotropic body of canonical form (Survey) / Podil'chuk Yu.N. // *International Applied Mechanics*. - 1997. - 33, №10. P. 763-787.
8. Freund L.B. *Thin Film Materials* / Freund L. B., Suresh S.- Cambridge: [Cambridge University Press](#), 2003.- 802 p.
9. Selvadurai A.P.S. A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces / Selvadurai A.P.S. // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1994. № 3. P. 493-509.
10. Gladwell G.M.L. On contact problems for a medium with rigid flat inclusions of arbitrary shape / Gladwell G.M.L. // *International Journal of Solids and Structures*. 1995. 32, № 3-4. P.383-389.
11. Elliott H.A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals / Elliott H.A., Mott N.F. // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1948. 44, № 4. P.522-533.

**MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF THE CONTACT INTERACTION OF
TRANSVERSALLY ISOTROPIC ELASTIC HALF-SPACES IN THE PRESENCE OF A RIGID
FLAT INCLUSION BETWEEN THEM**

Kirilyuk Vitaly S., doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, senior researcher, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, 3 Nesterova str, mathematical modeling of processes in mechanics, phone +380995252031, kirilyuk_v@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0002-8513-0378>

Levchuk Olga I., Ph.D., senior researcher, senior researcher, S.P. Timoshenko Institute of mechanics of NAS of Ukraine, 3 Nesterova str, mathematical modeling of processes in mechanics, phone +38044596 7715, 2013levchuk@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6514-6225>

Gavrilenko Valeriy V., doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of department of information systems and technologies, faculty of transport and information technologies of National Transport University, Kyiv 01010, Omelyanovich-Pavlenko str. 1, mathematical modeling of processes in mechanics, phone +380503806406, v_gavr@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0001-9682-4204>

Viter Mykhailo B., Ph.D., associated professor, professor of department of information systems and technologies, faculty of transport and information technologies of National Transport University, mathematical modeling of processes in mechanics, phone +380669413905, mbviter@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4109-005X>

Abstract. Mathematical and computer modeling of the contact interaction of two transversely isotropic elastic half-spaces with different properties in the presence of a rigid flat inclusion between them under compression is carried out. Based on the representation of the general solution of the system of equilibrium equations for a transversally isotropic body in terms of harmonic functions, a correspondence is established between the contact interaction parameters for two transversely isotropic and two elastic isotropic half-spaces (in the presence of a rigid planar inclusion of an arbitrary shape between them), which generalizes Gladwell's result to the case interactions of transversely isotropic half-spaces. By means of the mathematical and computer modeling, the contact interaction of transversely isotropic half-spaces with a disk-like inclusion is studied. The analysis of the numerical results is carried out, the influence of the elastic properties of the half-space, the geometric dimensions of the inclusion on the parameters of the contact interaction is studied.

Key words: mathematical and computer modeling, transversely isotropic material, elastic half-space, rigid planar inclusion, arbitrary shape, contact parameters

References

1. [Borodich F.M.](#) [et.al.]. (2014). [The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids](#) // Mechanics of Materials. 75. 34-44.
2. [Chai Y.S.](#) [et.al.]. (2018). [Local tangential contact of elastically similar, transversely isotropic elastic bodies](#) // Meccanica. – 53, 11-12. 3137-3143.
3. [Davtyan D.B.](#) [et.al.]. (2014). [Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space](#) // Mechanics of Solids. 49. 5. 578-586.
4. [Fabrikant V.I.](#) (2017) [Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space](#) // Acta Mechanica. 228. 4. 1541-1560.
5. [Kirilyuk V.S.](#) (2008) [Stress state of a piezoceramic body with a plane crack opened by a rigid inclusion](#) // Int. Appl. Mech. 44. 7. 757-768.
6. [Marmo F.](#) [et.al.]. (2016). [Analytical formulas and design charts for transversely isotropic half-spaces subject to linearly distributed pressures](#) // Meccanica. 51. 11. P. 2909-2928.
7. [Podil'chuk Yu.N.](#) (1997) Exact analytic solutions of three-dimensional boundary-value problems of the statics of a transversely isotropic body of canonical form (Survey) // International Applied Mechanics. 33. 10. 763-787.
8. [Freund L.B.](#) (2003) Thin Film Materials. Cambridge: [Cambridge University Press](#). 802.
9. [Selvadurai A.P.S.](#) (1994) A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces // Q. J. Mech. Appl. Math. 3. 493-509.
10. [Gladwell G.M.L.](#) (1995) On contact problems for a medium with rigid flat inclusions of arbitrary shape / [Gladwell G.M.L.](#) // International Journal of Solids and Structures. 32. 3-4. 383 -389.
11. [Elliott H.A.](#) [et.al.]. (1948). Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 44. 4. 522-533.