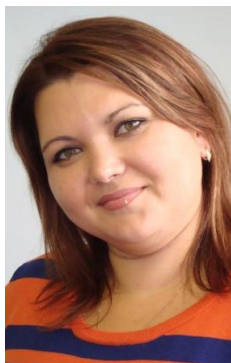


ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОДІБНІСТЬ ПРИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ТА ТЕОРЕТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ТЕРМОМІЦНОСТІ ДОРОЖНІХ МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ

THERMO-MECHANICAL SIMILARITY IN THE EXPERIMENTAL AND THEORETICAL MODELING OF THE THERMAL RESISTANCE OF ROAD MATERIALS AND STRUCTURES



Шлюнь Наталія Володимирівна, кандидат технічних наук, доцент, Національний транспортний університет, кафедра вищої математики, к. 511, вул. Бойчука 42, Київ, Україна, 01103, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, тел. +380975936346,

<https://orcid.org/0000-0003-1040-8870>

Анотація. Експериментальне чи теоретичне моделювання термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій зазвичай пов'язане з заміною вивчення ефекту, що нас цікавить, в натурі (прототипі) аналізом розв'язків відповідних математичних рівнянь або із розглядом аналогічного явища на експериментальній моделі меншого чи більшого масштабу в спеціальних лабораторних чи експериментальних умовах при повному або частковому дотриманні відповідності між фізичними властивостями об'єктів природи та моделі. Основний зміст моделювання полягає в тому, щоб за результатами математичних або експериментальних дослідів можна було робити висновки про поведінку системи в натурних умовах. Як правило, моделювання буває ґрунтоване на розгляді геометрично чи фізично подібних явищ деформування конструкцій. При цьому вважається, що два тіла геометрично подібні, якщо відношення всіх відповідних довжин однакові, тобто, рівні коефіцієнту подібності чи масштабу.

Два явища фізично подібні, якщо за заданими характеристиками одного з них можна визначити характеристики другого з переходом від однієї системи одиниць до іншої. В результаті встановлення системи параметрів, що визначають виділений клас явищ, можна встановити умови подібності двох із них.

Задача визначення умов подібності для дорожніх матеріалів та конструкцій ускладнюється, коли вони експлуатуються в умовах змінних температур, і число параметрів, для яких необхідно обчислювати масштабні коефіцієнти, збільшується. В даній роботі вони визначаються на базі теорії термопружності для геометричних характеристик, параметрів пружності (модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона) та термічних параметрів (коефіцієнта лінійного температурного розширення, коефіцієнта теплопровідності). Умови подібності визначаються для функцій термопереміщення, термонапруження та температури. На конкретних прикладах показано також, що методи теорії подібності можуть бути інструментом для розв'язання прикладних задач.

Ключові слова: теорія подібності, масштабні коефіцієнти, дорожні конструкції, термопружність, термонапруження.

Вступ

При експериментальному та теоретичному моделюванні явищ деформування та міцності дорожніх матеріалів і конструкцій одним із основних факторів є забезпечення чисельної відповідності між деякими характеристиками моделі та прототипу. Для дорожніх матеріалів і конструкцій, які експлуатуються в умовах зміни температур, до таких характеристик можна віднести

функції термонапружень і термодформацій, які в значній мірі визначають термоміцність та довговічність цих систем. В загальному випадку, задача забезпечення достатніх умов подібності між моделлю та прототипом пов'язана з визначеними теоретичними труднощами, оскільки потрібно мати справу зі суттєво неоднорідними (комполітними) середовищами при їхніх лінійному та нелінійному термодформуванні в умовах змінного за часом термо-в'язко-пружного зв'язку між інваріантами тензорів деформацій. Цією обставиною можна пояснити відсутність в науковій літературі публікацій за даним напрямком. Тому, враховуючи, що теорія подібності дозволяє не тільки встановлювати відповідність між експериментальними та теоретичними моделями та прототипом, але й розв'язувати конкретні прикладні задачі, можна зробити висновок про актуальність розробки її основних положень для дорожніх матеріалів та конструкцій.

Перші теоретичні розробки по теорії подібності відносяться до математики. Огляд публікацій за цим напрямком поданий в статті [1]. В біології елементи теорії подібності використовувались для встановлення геометричної відповідності образів біологічних об'єктів [2]. Методи теорії подібності, розроблені в механіці [3,4], використовуються в теорії в'язких рідин, газовій динаміці, теорії турбулентності, астрофізиці й атомній енергетиці. В останні роки теорія подібності стала застосовуватись у нових наукових напрямках, які пов'язані з проблемами комп'ютерного бачення, теорії розпізнавання образів, із обробкою мов, із класифікацією амінокислот [5] та в теорії навчання [6].

До задач моделювання термоміцності дорожніх матеріалів і конструкцій найбільш близьке дотикання мають результати, отримані в теорії подібності термопружних систем [7-9]. Однак їх безпосереднє використання стримується вузькістю їх застосовності лише для однорідних пружних середовищ, які описуються співвідношеннями теорії термопружності [10-12], в той час як дорожні конструкції є суттєво неоднорідними. Встановлення для них масштабних коефіцієнтів за параметрами геометрії, модуля пружності, коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта лінійного термічного розширення та коефіцієнта теплопровідності виявилось можливим за допомогою аналітичних розв'язків задач про термодформування середовищ, армованих стрижневими та сферичними включеннями, отриманих в НТУ [13-16].

Метою даної роботи є встановлення законів подібності термопружного деформування дорожніх матеріалів та конструкцій із урахуванням термомеханічної неоднорідності їх структур. Її завдання включає визначення масштабних коефіцієнтів та розв'язок за їх допомогою прикладної задачі про розширення багатопарового дорожнього покриття.

Критерії подібності термопружного деформування однорідних середовищ

Звернемось спочатку до загальних питань подібності. Нехай явище в деякій системі визначається n параметрами, деякі з яких можуть бути безрозмірними. Покладемо, що розмірності визначальних змінних та фізичних постійних виражені з них через розмірності k ($k \leq n$) із незалежними розмірностями. В цьому випадку з n величин можна скласти $n-k$ незалежних безрозмірних комбінацій і всі безрозмірні характеристики явища розглядати як функції цих $n-k$ незалежних безрозмірних комбінацій. Відтак, поміж всіх безрозмірних величин, складених із характеристик явища, завжди можна вказати деяку базисну систему, тобто систему безрозмірних величин, яка визначає собою всі інші. Ця система визначає подібність прототипу та моделі за допомогою наступної умови [3]. Для подібності двох явищ необхідно та достатньо, щоб чисельні значення безрозмірних комбінацій, що утворюють базу, в цих двох явищах були однакові. Умови про постійність бази, складеної з даних величин, називаються критеріями подібності.

Якщо умови подібності виконані, то для фактичного розрахунку всіх характеристик в натурі за даними про розмірні характеристики на моделі необхідно знати перехідні масштаби для всіх відповідних величин. Якщо явище визначається n параметрами, з яких k мають незалежні розмірності, то для величин з незалежними розмірностями перехідні масштаби можуть бути довільними й їх можна задати враховуючи умови задачі, а при експериментах, також враховуючи умови дослідів. Перехідні масштаби для всіх інших розмірних величин легко отримуються з формул,

які виражають розмірності кожної величини через розмірності k величин з незалежними розмірностями, для яких масштаби підказані умовами досліду та постановки задачі.

Основні закони теорії подібності мають братися до уваги також при математичному та експериментальному дослідженні термомеханічного деформування дорожніх та мостових покриттів. В процесі експлуатації їх конструкції піддаються впливу транспортних навантажень і теплових стаціонарних або перехідних збурень. Зазвичай напруження, що викликане механічними навантаженнями, з тією або іншою точністю легко визначаються теоретичними або експериментальними методами. В цих випадках, якщо знайдені і термонапруження, то для лінійного процесу загальні напруження знаходяться методом суперпозиції. При цьому однак, термомеханічні задачі виявляються набагато складнішими чисто механічних задач і їх аналітичні розв'язки вдається отримати тільки в випадках нескладної геометрії та простого термічного збурення. У зв'язку з цим при більш загальних постановках про моделювання термодформування конструкції ці дослідження повинні проводитися із врахуванням законів подібності між прототипом та моделлю.

Звернемось на початку до найбільш простої задачі про визначення масштабних множників для параметрів температури, переміщень, відносних деформацій та напружень при геометричній подібності прототипу та моделі в умовах квазі-статичної зміни температури та деформацій. Покладемо, що при цьому всі механічні та термічні константи системи залишаються незмінними. В якості базових співвідношень теорії термопружності використаємо рівняння Нав'є [10,13] в системі координат $Ox_1x_2x_3$,

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_1}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_2}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

які описують деформування прототипу при визначеній геометрії, поле температур $T(x_1, x_2, x_3)$ та заданих крайових умов для переміщень u_1, u_2, u_3 . Тут λ, μ – параметри пружності Ламе, α – коефіцієнт лінійного термічного розширення.

Будемо вивчати термопружне деформування прототипу за допомогою теоретичної або експериментальної моделі, геометрично подібної прототипу з коефіцієнтом подібності l , при умові зберігання крайових умов на відповідних ділянках країв моделі та значенні температури T у відповідних точках. Для аналізу використаємо масштабовану систему координат $O(X_1, X_2, X_3)$, в якій $X_1 = lx_1, X_2 = lx_2, X_3 = lx_3$. В цій системі термопружні переміщення $U_1(X_1, X_2, X_3), U_2(X_1, X_2, X_3), U_3(X_1, X_2, X_3)$ описуються рівняннями

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) U_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial X_1}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) U_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial X_2}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) U_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial X_3}. \end{aligned} \quad (2)$$

В цих рівняннях зробимо заміни $X_1 = lx_1, X_2 = lx_2, X_3 = lx_3$ та помножимо ліві й праві частини на l^2 . В результаті отримаємо систему

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= l(3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_1}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= l(3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_2}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= l(3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

яка повністю еквівалентна системі (2), але відрізняється від системи (1) тільки написаннями шуканих змінних u_1, u_2, u_3 і U_1, U_2, U_3 та множником l в правих частинах системи (3). Звідси випливає

$$\begin{aligned} U_1(X_1, X_2, X_3) &= lu_1(x_1, x_2, x_3), \\ U_2(X_1, X_2, X_3) &= lu_2(x_1, x_2, x_3), \\ U_3(X_1, X_2, X_3) &= lu_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (4)$$

тобто переміщення в моделі також геометрично подібні переміщенням в прототипі з масштабним множником l .

При цьому відносні деформації e_{ii}, e_{ij} в моделі рівні

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \frac{\partial lu_i}{\partial lx_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial lu_i}{\partial lx_j} + \frac{\partial lu_j}{\partial lx_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (5)$$

Як видно, відносні деформації у відповідних точках прототипу та моделі рівні.

Оскільки у виразі для термонапружень в прототипі

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda I_1 - (3\lambda + 2\mu)\alpha T] \delta_{ij}, \quad (6)$$

права частина є лінійною комбінацією відносних деформацій в прототипі, що зберігають свої значення в моделі, та доданку з αT , також не змінного в моделі, то термонапруження (6) також співпадають з термонапруженнями S_{ij} у відповідних точках моделі, тобто

$$S_{ij}(X_1, X_2, X_3) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Звернемось тепер до рівняння нестационарної теплопровідності прототипу у формі

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (8)$$

де a – коефіцієнт теплопровідності.

Нехай вибрана модель геометрично подібна прототипу з масштабним коефіцієнтом l . Визначимо масштабний множник θ в модельному часі τ , з плином якого поле температури $T(X_1, X_2, X_3, \tau)$ в точках моделі співпадають з полем температури $T(x_1, x_2, x_3, t)$ у відповідних точках прототипу при часі $\tau = \theta t$.

Для цього запишемо рівняння (8) у змінних моделі

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_3^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Врахуємо, що $X_1 = lx_1, X_2 = lx_2, X_3 = lx_3, X_3 = lx_3, \tau = \theta t$.

Тоді рівняння (9) можна привести до виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_3^2} = \frac{l^2}{\theta} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (10)$$

Звідси випливає, що величину θ вибрати рівною,

$$\theta = l^2, \quad (11)$$

то рівняння (10) процесу нестационарної теплопровідності в моделі прийме форму рівняння (8) теплопровідності в прототипі і значення температури у відповідних точках (x_1, x_2, x_3) і (X_1, X_2, X_3) прототипу та моделі у відповідні моменти часу t і τ будуть однакові.

При цьому необхідно відмітити, що в приведених розмірковуваннях припускається, що відповідні умови подібності виконуються і для крайових і для початкових умов задачі. У випадках, коли на краях прототипу задані змінні за часом функції температури $T(x_1, x_2, x_3, t)$ та теплові потоки, то крайові та початкові умови в моделі формулюються елементарно з тими ж коефіцієнтами подібності l і θ . Однак, якщо в прототипі вільні поверхні з умовами конвективного теплообміну або в середині пружного середовища є теплові джерела та стоки, то умови термопружної подібності в цих випадках значно ускладнюються і вони мають розглядатися спеціально. В нашому випадку вони не досліджуються.

В кінці цього підрозділу відмітимо, що наведені умови температурної подібності можуть бути використані не тільки при експериментальному моделюванні явищ термопружного деформування, але також і для пояснення деяких спеціальних термопружних ефектів. Наприклад, при теоретичному аналізі розшарування дорожніх покриттів в крайових зонах, при узагальненні отриманих результатів на неоднорідні макро – та мікрровключення, при експериментальному моделюванні швидко плинних нестационарних термічних процесів і в інших випадках при моделюванні явищ термопружності.

Умови термомеханічної подібності для армованих композитних середовищ

Нехай асфальтобетонне чи цементобетонне середовище армоване стрижнями та температура системи дорівнює T . В роботах [14-16] показано, що додаткові внутрішньоструктурні термонапруження, що викликані несумісністю термомеханічних параметрів фаз системи, локалізуються на її інтерфейсних поверхнях та спадають обернено пропорційно квадрату відстані від елемента, що розглядається, до осі стрижня. Тому для аналізу термодформування системи можна виділити один стрижень радіуса r_1 та розглядати його плоскодеформований стан в полярній системі координат $Or\varphi$, де r – радіальна координата, φ – колова координата. Для стрижня 1 параметри термопружності складають: модуль пружності E_1 , коефіцієнт Пуассона ν_1 , коефіцієнт лінійного температурного розширення α_1 ; для матриці 2 вони дорівнюють E_2, ν_2, α_2 .

Тоді радіальні переміщення $u^{(1)}(r)$ в стрижні 1 і $u^{(2)}(r)$ в матриці 2 рівні

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rT \left(\frac{E_1 \alpha_1}{1-2\nu_1} + E_2 \alpha_2 \right) \bigg/ \left[\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \right] \quad (r \leq r_1), \\ u^{(1)}(r) &= r(1+\nu_1)\alpha_2 T + \frac{r_1^2 T}{r} \left(\frac{\alpha_1}{1+\nu_2} - \frac{\alpha_2}{1+\nu_1} \right) \bigg/ \left[\frac{1}{1+\nu_1} + \frac{E_2(1-2\nu_1)}{E_1(1+\nu_2)} \right] \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Відповідні значення радіальних $(\sigma_r^{(1)}(r), \sigma_r^{(2)}(r))$ та колових $(\sigma_\varphi^{(1)}(r), \sigma_\varphi^{(2)}(r))$ термонапружень визначаються рівностями:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r) = \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= - \frac{E_1 E_2 [(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2] T}{E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_2)} \quad (0 \leq r \leq r_1), \\ \sigma_r^{(2)}(r) &= - \frac{r_1^2 E_1 E_2 [(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2] T}{r^2 E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_2)} \quad (r \geq r_1), \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{r_1^2 E_1 E_2 [(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2] T}{r^2 E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_2)} \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння (12), (13) дозволяють встановити умови геометричної подібності. Так, якщо в прототипі з радіальною координатою r і з радіусом r_1 стержня 1 при температурі T радіальні переміщення $u^{(1)}(r)$ та $u^{(2)}(r)$ визначаються рівняннями (12), то в моделі з радіусом стержня 1, що дорівнює R_1 , переміщенням $U^{(1)}(R)$, $U^{(2)}(R)$, у відповідності до (12), рівні

$$\begin{aligned} U^{(1)}(R) &= \frac{R_1}{r_1} u^{(1)}\left(\frac{r_1}{R_1} R\right), \quad (0 \leq R \leq R_1), \\ U^{(2)}(R) &= \frac{R_1}{r_1} u^{(2)}\left(\frac{r_1}{R_1} R\right), \quad (R_1 \leq R). \end{aligned} \tag{14}$$

Тому при таких умовах переміщення в прототипі та моделі геометрично подібні з масштабним множником

$$l = \frac{R_1}{r_1} \tag{15}$$

і замість (14) можна записати

$$U^{(1)}(R) = l u^{(1)}(r), \quad U^{(2)}(R) = l u^{(2)}(r). \tag{16}$$

На відміну від випадку подібності за модулем пружності E для однорідних середовищ, в даному випадку для збереження відповідності між прототипом та моделлю, якщо змінюється модуль пружності однієї з фракцій, то необхідно в такій пропорції змінювати модуль пружності іншої фракції. При цьому, як випливає з (12), (13), їх змінні значення склали

$$e_1 = \varepsilon E_1, \quad e_2 = \varepsilon E_2 \tag{17}$$

то функції переміщень у відповідних точках прототипу та моделі будуть однакові, а щоб отримати напруження в моделі, необхідно напруження в прототипі помножити на масштабний коефіцієнт ε .

Умови подібності за параметрами α_1 і α_2 також мають встановлюватись сумісно. Якщо в моделі їх нові значення рівні

$$A_1 = a\alpha_1, \quad A_2 = a\alpha_2, \tag{18}$$

то значення переміщень і напружень в моделі визначаються множенням їх значень в прототипі на масштабний коефіцієнт a .

Так як температура T в рівняння (12), (13) входить лінійно, то для неї масштабний коефіцієнт дорівнює одиниці. Інакше складається справа з коефіцієнтом Пуассона ν . Для нього масштабний коефіцієнт відсутній.

Встановлені закони термопружної подібності дозволяють зробити важливі висновки про те, що формули (12), (13) прийнятні як для конструкцій, армованих стержнями невеликого радіуса r_1 , так і для композитів, армованих мікрволокнами, за умови, що матриця та волокна володіють властивостями суцільності та для них справедлива теорія пружності. Крім того, на їх основі можна переходити від прототипів великих розмірів до моделей малих розмірів з дотриманням відповідності між ними.

Теоретичне моделювання ефекту розшарування композитних матеріалів

Використовуючи методи теорії подібності, є можливість пояснення широко відомого ефекту розшарування шаруватих композитів в зоні їх вільного краю [17-20]. В роботах [19,20] відмічається, що це негативне явище все ще залишається проблемою в теорії композитів і одним із способів її пом'якшення є скошування товщини композиту (утворення фаски) на його краю.

Аналогічний ефект виникає в дорожніх та мостових покриттях в результаті різниці коефіцієнтів лінійного температурного розширення покриття 1 та основи 2 (рис.1).

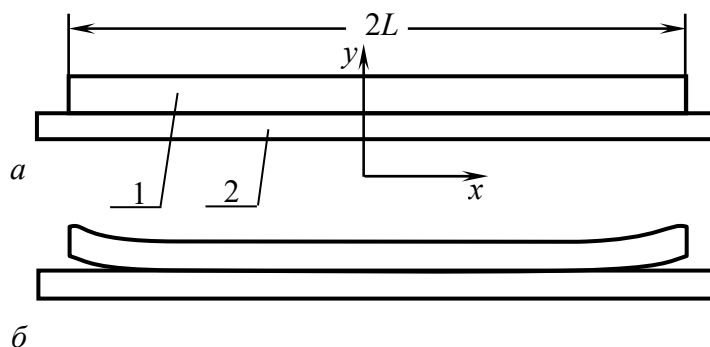


Рисунок 1 – Схема поперечного перерізу асфальтобетонного покриття в вихідному (а) та розшарованому (б) станах.

Figure 1 – Diagram of the cross-section of the asphalt concrete pavement in the initial (a) and layered (b) states

В якості прикладу розглянемо, коли асфальтобетонний шар 1 товщиною $h_1 = 0,07$ м пов'язаний з металевою основою 2 товщиною $h_2 = 0,014$ м. Значення термомеханічних параметрів системи склали: $E_1 = 5 \cdot 10^9$ Па, $\nu_1 = 0,2$, $\alpha_1 = 2,46 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$, $E_2 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_2 = 0,3$, $\alpha_2 = 1,3 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. Термонапружений стан плоского фрагменту лівого краю цієї системи протяжністю 7,5 м вздовж осі Ox при температурі $T = -25^\circ\text{C}$ було визначено методом скінченного елемента. На рис. 2 виділено поле дотичних напружень τ_{xy} на правій ділянці системи довжиною 0,2 м. Як видно на більшій частині виділеного перерізу дотичні напруження мають майже нульові значення, і тільки поблизу лівого краю системи в її інтерфейсній зоні сформувалась площадка розміром приблизно $1,5 \text{ см} \times 2 \text{ см}$, в якій ці напруження мають пікові значення, які є основною причиною виникнення пластичних зсувних деформацій між шарами.

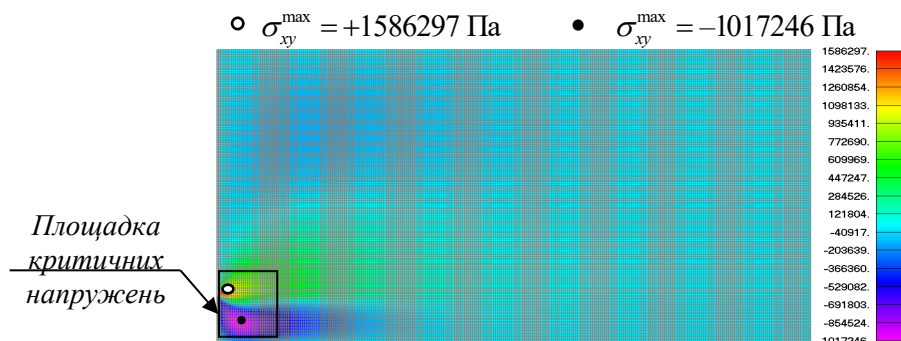


Рисунок 2 – Поле дотичних напружень σ_{xy} в крайовому перерізі двошарової конструкції

Figure 2 – Field of tangential stresses σ_{xy} in the edge section of a two-layer structure

В цьому випадку, якщо протяжність зони пластичності матеріалу покриття виявляється достатньою для компенсації пластичних деформацій верхнього шару, то система зберігає свою цілісність, якщо ні, то у тому місці виникає відшарування верхнього шару. При цьому необхідно відзначити, що в результаті багатократних змін температури та додаткових дій транспортних навантажень ймовірність виникнення локальних зсувних пошкоджень на цій ділянці зростає.

Підкреслимо також, що спроба запобігання такого ефекту за рахунок збільшення товщини верхнього шару в l раз, призведе також до негативних наслідків, оскільки за умовами геометричної подібності термонапруження у відповідних точках нової моделі збережуть свої (критичні) значення, площадка пластичних деформацій збільшиться в l^2 разів та запасу пластичної плинності матеріалу вже буде недостатньо. І навпаки, до більш позитивного результату приведе зменшення товщини

шару, оскільки, хоча при цьому зсувні напруження у відповідних точках нової моделі не зміняться, площа критичних значень зменшиться в l^2 разів. Однак за умовами експлуатації товщина h_1 верхнього шару на проїзній частині дороги має бути збережена, тому можна рекомендувати її поступове зменшення на крайових ділянках та її доведення до нуля на самих краях (рис.3).

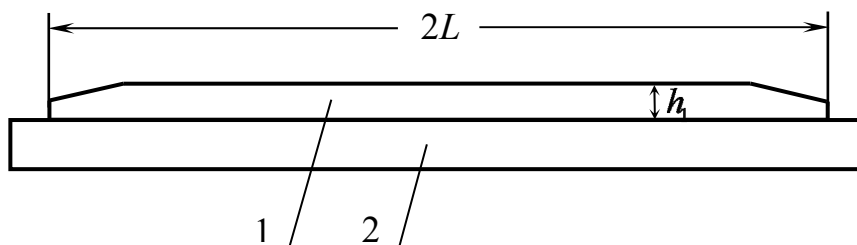


Рисунок 3 – Схема дорожнього покриття зі скошеними краями
Figure 3 – Scheme of a road surface with beveled edges

Тоді розміри площадки критичних напружень на краях обернуться на нуль, а разом із нею зникнуть і самі напруження. Відмічений ефект узгоджується з ефектом усунення явища розшарування шаруватих композитів за рахунок створення на їх краях фасок.

Висновки

1. На базі співвідношень теорії термопружності встановлені умови геометричної та механічної подібності між прототипом і моделлю в дорожніх конструкціях та матеріалах.

2. Знайдені масштабні коефіцієнти для геометричних параметрів, модулів пружності та коефіцієнтів лінійного термічного розширення неоднорідних матеріалів, що забезпечують подібність для функцій переміщень та рівностей функцій термонапружень у відповідних точках прототипу та моделі.

3. За допомогою умов теорії подібності дано пояснення ефекту термічного розшарування дорожнього покриття, запропонований спосіб його недопущення.

Перелік посилань

1. Bluman G., Broadbridge P., King J.R., Ward M.J. Similarity: generalizations, applications and open problems. *J. Eng. Math.* 2010. 66. pp. 1-9.
2. Walter R. Stahl. Similarity and dimensional methods in biology. *Science.* 1962. V. 137 (3525). pp. 205-212. Doi:10.1126/science137.3525.205.
3. Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics.* CRC Press, 1993.
4. Susan G. Sterrett. Similarity and dimensional analysis. *Philosophy of Technology and Engineering Sciences.* Antonie Meijers, Amsterdam, 2009, pp. 799-823.
5. Yihua Chen, Eric K. Garcia, Maya R. Gupta, Ali Rahimi, Luca Cazzanti. Similarity-based classification: concepts and algorithms. *Journal Machine Learning Research.* 2009. 10. Pp. 747-776.
6. Balcan M.F., Blum A., Srebro N. A theory of learning with similarity functions. *Machine Learning.* 2008. 72 (1-2). Pp. 89-112.
7. Dugundii J., Colligeros Y.A. Similarity laws for aerothermoelastic testing. *Int. Aero/Space Sci.* 1962. V. 29 (8). Pp. 936-950.
8. Green A.E., Radok J.R.M., Rivlin R.S. Thermo-elastic similarity laws. *Quarterly of Applied Mathematics* 1958. V. 15 (4). Pp. 381-393.
9. Hovanesian J.D., Kowalski H.C. Similarity in thermoelasticity. *Experimental Mechanics*, February 1967. Pp. 82-84. <https://doi.org/10.1007/BF02326711>.
10. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев, Наукова думка, 1970. 307 с.
11. Hetnarski R.B. and Ignaczak J. *Mathematical Theory of Elasticity*, Taylor and Francis, New York, 2004.

12. Nowacki W. Thermoelasticity, 2 nd ed. Oxford: PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw and Pergamon Press. 1986.
13. Гуляев В.І., Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружний стан багатопшарових дорожніх покриттів. Київ, НТУ, 2018. 252 с.
14. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V., Bilobrytska O.I. Negative thermomechanical effects in granular composites with incompatible thermomechanical parameters of their components. *International Review of Mechanical Engineering*. 2022. 16(4). pp. 188–197. <https://doi.org/10.15866/ireme.v16i4.21996>.
15. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V. Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. *System Research and Information Technologies*. 2022. 2. pp.117-127. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09>
16. Шлюнь Н. В. Особливості термонапруженого стану асфальтобетонного дорожніх покриттів з гумовими включеннями. *Дороги і мости*. Київ, 2022. Вип. 26. С. 124–137.
17. Wang S.S. Edge delamination in angle-ply composite laminates. *AIAA Journal*.1984. 22 (2). Pp. 256-264.
18. Schellekens J.C., Borst De R. Free edge delamination in carbon epoxy laminates: A novel numerical / experimental approach. *Composite Structures*. 1993. V. 28.
19. Lecomte-Grosbras P., Paluch B., Brieu M. Free edge effects study in laminated composites using Digital Image Correlation: effect of material and geometrical singularities. *EPJ Web of Conferences* 6. 20011(2010). <https://doi.org/1021/epjconf/20100620011>.
20. Osama Mohamad Elmardi Sulieman Khayal. A review study of delamination in composite laminated plates. Preprint, April 2019. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12740.07041>.

THERMO-MECHANICAL SIMILARITY IN THE EXPERIMENTAL AND THEORETICAL MODELING OF THE THERMAL RESISTANCE OF ROAD MATERIALS AND STRUCTURES

Shlyun Nataliia V, *Ph.D., Associate Prof., National Transport University, Kyiv, Ukraine*
<https://orcid.org/0000-0003-1040-8870>

Annotation: Experimental or theoretical modeling of the thermal strength of road materials and structures is usually associated with replacing the study of the effect we are interested in nature (prototype) with the analysis of the solutions of the corresponding mathematical equations or with the consideration of a similar phenomenon on a smaller or larger scale experimental model in special laboratory or experimental conditions with full or partial observance of the correspondence between the physical properties of the objects of nature and the model. The main content of modeling is that, based on the results of mathematical or experimental experiments, it is possible to draw conclusions about the behavior of the system in natural conditions. As a rule, modeling is based on consideration of geometrically or physically similar deformation phenomena of structures. At the same time, it is considered that two bodies are geometrically similar, if the ratio of all corresponding lengths is the same, that is, equal to the coefficient of similarity or scale.

Two phenomena are physically similar if the given characteristics of one of them can be used to determine the characteristics of the other with the transition from one system of units to another. As a result of establishing a system of parameters defining a selected class of phenomena, conditions for the similarity of two phenomena can be established.

The task of determining similarity conditions for road materials and structures becomes more complicated when they are operated in conditions of variable temperatures, and the number of parameters for which it is necessary to calculate scale factors increases. In this work, they are determined on the basis of the theory of thermoelasticity for geometric characteristics, elasticity parameters (Young's modulus, Poisson's ratio), thermal parameters (linear thermal expansion coefficient, thermal conductivity coefficient). Similarity conditions are defined for the thermal displacement, thermal stress, and temperature functions. Concrete examples also show that methods of similarity theory can be a tool for solving applied problems.

Key words: similarity theory, scale coefficients, road structures, thermal elasticity, thermal stress.

References

1. Bluman G., Broadbridge P., King J.R., Ward M.J. Similarity: generalizations, applications and open problems. *J. Eng. Math.* 2010. 66. pp. 1-9.
2. Walter R. Stahl. Similarity and dimensional methods in biology. *Science.* 1962. V. 137 (3525). pp. 205-212. <https://doi.org/10.1126/science137.3525.205>.
3. Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics.* CRC Press, 1993.
4. Susan G. Sterrett. Similarity and dimensional analysis. *Philosophy of Technology and Engineering Sciences.* Antonie Meijers, Amsterdam, 2009, pp. 799-823.
5. Yihua Chen, Eric K. Garcia, Maya R. Gupta, Ali Rahimi, Luca Cazzanti. Similarity-based classification: concepts and algorithms. *Journal machine Learning Research.* 2009. 10. Pp. 747-776.
6. Balcan M.F., Blum A., Srebro N. A theory of learning with similarity functions. *Machine Learning.* 2008. 72 (1-2). Pp. 89-112.
7. Dugundii J., Colligeros Y.A. Similarity laws for aerothermoelastic testing. *Int. Aero/Space Sci.* 1962. V. 29 (8). Pp. 936-950.
8. Green A.E., Radok J.R.M., Rivlin R.S. Thermo-elastic similarity laws *Quarterly of Applied Mathematics* 1958. V. 15 (4). Pp. 381-393.
9. Hovanesian J.D., Kowalski H.C. Similarity in thermoelasticity. *Experimental Mechanics*, February 1967. Pp. 82-84. <https://doi.org/10.1007/BF02326711>.
10. Kovalenko, A.D. *Osnovy termopruzhnosti [Thermoelasticity fundamentals].* Kyiv: Naukova Dumka, 1970. 307 s. [in Russian].
11. Hetnarski R.B. and Ignaczak J., *Mathematical Theory of Elasticity*, Taylor and Francis, New York, 2004.
12. Nowacki W. *Thermoelasticity*, 2 nd ed. Oxford: PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw and Pergamon Press. 1986.
13. Hulciaiev V.I., Haidachuk V.V., Mozghovyi V.V., ZaietsYu.O., Shevchuk L.V., Shliun N.V. *Termopruzhnnyi stan bahatosharovykh dorozhnikh pokryttiv // Monohrafiia – K. : NTU, 2018. – 252 s. [in Ukrainian].*
14. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V., Bilobrytska O.I. Negative thermomechanical effects in granular composites with incompatible thermomechanical parameters of their components. *International Review of Mechanical Engineering.* 2022. 16(4). pp. 188–197. <https://doi.org/10.15866/ireme.v16i4.21996>.
15. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V. Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. *System Research and Information Technologies.* 2022. 2. pp.117-127. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09>
16. Shliun N. Features of the thermal stressed state of road coatings with rubber inclusions. *Dorogi i mosti [Roads and bridges].* Kyiv, 2022. Iss. 26. P. 124–137 [in Ukrainian].
17. Wang S.S. Edge delamination in angle-ply composite laminates. *AIAA Journal.* 1984. 22 (2). Pp. 256-264.
18. Schellekens J.C., Borst De R. Free edge delamination in carbon epoxy laminates: A novel numerical / experimental approach. *Composite Structures.* 1993. V. 28.
19. Lecomte-Grosbras P., Paluch B., Brieu M. Free edge effects study in laminated composites using Digital Image Correlation: effect of material and geometrical singularities. *EPJ Web of Conferences* 6. 20011(2010). <https://doi.org/10.1021/epjconf/20100620011>.
20. Osama Mohamad Elmardi Sulieman Khayal. A review study of delamination in composite laminated plates. Preprint, April 2019. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12740.07041>.

Надійшла до редакції 19.04.2023.