

**СТРУКТУРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО КОМПЛЕКСУ РОЗРАХУНКУ НА МІЦНІСТЬ  
ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ НА ОСНОВІ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ  
ЕЛЕМЕНТІВ**

**STRUCTURE OF THE COMPUTER COMPLEX FOR CALCULATING THE STRENGTH OF  
PRISMATIC BODIES BASED ON THE SEMI-ANALYTIC METHOD OF FINITE ELEMENTS**



*Кузьмінець Микола Петрович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: [kuzminecnp@ukr.net](mailto:kuzminecnp@ukr.net), тел. +380983600812, Україна, 01103, м. Київ, вул. М. Бойчука, 40 А.*

<https://orcid.org/0009-0001-1841-694X>



*Максим'юк Юрій Всеволодович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ*

<https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>



*Мартинюк Іван Юрійович, кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ*

<https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>



*Степаненко Тетяна Степанівна, доцент кафедри комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, Національний транспортний університет, Київ, Україна,*

<https://orcid.org/0009-0009-2304-9783>

**Анотація.** Одним з головних і відповідальних етапів створення апарату чисельного аналізу конструкцій методом скінчених елементів є його реалізація у вигляді комплексу програм. Принципи побудови комплексу мають враховувати сучасні вимоги, що виставляються до програмного

забезпечення розрахунку міцності в сучасних розрахункових комплексах. До їх числа в першу чергу відноситься автоматизація основних етапів обчислювального процесу, раціональне використання ресурсів операційної та зовнішньої пам'яті запам'ятовуваних пристроїв, не замкнутість у відношенні до класів задач, що вирішуються, алгоритми завдання вхідних даних, методом дискретизації та вирішення систем рівнянь і т.д. Крім того структура програм повинні враховувати специфіку напіваналітичного методу скінчених елементів, для якого ще не накопичений такий великий досвід створення розвинутих систем математичного забезпечення вишукувань просторових конструкцій, як при використанні традиційного варіанту МСЕ. Значний досвід скінченоелементного розв'язання задач механіки, накопичений впродовж останніх десятиріч, знайшов відображення у низці промислових комерційних програмних комплексів, вітчизняного (ЛІРА, SCAD) та іноземного (ANSYS, Nastran, ABAQUS) виробництва. Розвинена скінченоелементна база цих програмних комплексів дозволяє отримувати розв'язки широкого кола задач механіки деформівного твердого тіла для об'єктів різної вимірності, в тому числі для масивних просторових тіл, а зручні засоби введення-виведення інформації і обробки отриманих результатів роблять їх вельми доступними для широкого кола користувачів та дозволяють з максимальним ступенем наочності відображати отримані результати. Також існують об'єктно орієнтовані комплекси, які створені на виробничих підприємствах та науково-дослідних інститутах наприклад в Інституті проблем міцності НАН України, у Дніпропетровському національному університеті.

Проведений дослідження визначить найбільш оптимальні з точки зору обчислювальних витрат і складності реалізації шляхи розв'язання перелічених задач, а також окреслить коло нерозв'язаних питань.

**Ключові слова.** Метод скінчених елементів (МСЕ), напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), ряди Фур'є, масивні, тонкостінні призматичні тіла, вектор вузлових реакцій, коефіцієнти матриці жорсткості.

#### **Постановка проблеми**

Значне число досліджень, пов'язаних з розробкою і застосуванням НМСЕ [3-5, 7, 9-11, 24], як правило, використовуються співвідношення тонких оболонок [12]. Розглянуті різні задачі, пов'язані з урахуванням розгалужених і складових систем [13-15, 25], визначенням напружено-деформованого стану оболонок змінної товщини при термосилового навантаження [16, 20, 23].

В роботах, що відображають застосування напіваналітичного методу скінчених елементів до розрахунку тіл обертання [1, 2, 6, 8, 17-19, 21, 22], використана ціла бібліотека SE яка складається з базових і спеціальних скінчені елементи.

#### **Завдання обробка і друк вихідної інформації**

Перетворення вхідної інформації в оперативну про геометричні зв'язки, перешкоджаючи переміщенням вузлів сіткової області по всій довжині призматичного тіла, виконує підпрограма

$$ZAKP(I1, J1, I2, J2, MN, F, HMS)$$

де MN – умовне число, що визначається в залежності від наявності переміщення по напрямленню або рівність їх нулю (див. табл.1.).

Після звернення до програми ZAKP в масиві для вузлів N(I,J), що задовольняє умови:

$$I1 \leq I \leq I2, J1 \leq J \leq J2 \tag{1}$$

значення кодів у чарунках F(N) зменшується на величину числа MN.

При відсутності кріплень на торцях тіла в усі чарунки масиву  $FTP(HMS)$  заноситься число 77. Вхідна інформація про наявність геометричних зв'язків у вузлах  $N(I, J)$  на торцях тіла перетворюється в оперативну підпрограму

$$ZAKREP(I1, J1, I2, J2, LN, FTP, HMS)$$

де десятки  $L(x^3 = -1)$  та одиниці  $N(x^3 = 1)$  числа LN підбираються аналогічно умовному числу MN.

Таблиця – 1  
Table – 1

$MN$	$Z^1$	$Z^2$	$Z^3$
1	0	$U_2$	$U_3$
2	$U_1$	0	$U_3$
3	0	0	$U_3$
4	$U_1$	$U_2$	0
5	0	$U_2$	0
6	$U_1$	0	0
7	0	0	0

Обчислення координат вузлів дискретної моделі та оформлення їх в масив  $Z(2, HMS)$  виконує підпрограма,

$$K\Phi\Phi RD (N1, \dots, NN, I1, \dots, IN, Z, HMS)$$

що складається в термінах мови ФОРТРАН. У процесі роботи підпрограма  $K\Phi\Phi RD$  використовує модулі типу  $INTERL, INTERP$  і т.д., що дозволяють задавати вхідну інформацію укрупненими блоками, межі яких визначені значенням сіткових координат  $(N1, \dots, NN)$  та  $(I1, \dots, IN)$ .

Визначення сіткових координат вузла з номером  $N$  в напрямку  $K$  виконує блок

$$SETK\Phi R (N, K)$$

Заповнення масивів  $FI(NUL, KZZ)$  та  $FI3(NUL, KZZ)$ , значенням координатних функцій та їх похідних по  $x^3$ , обчисленими в точках інтегрування, при розкладі переміщення по поліномам відбувається в результаті роботи підпрограми

$$FUNKP (F1, FI3, NUL, KZZ)$$

Цю операцію для рядів Фур'є виконує підпрограма

$$FUNKF (F1, FI3, NUL, KZZ)$$

Розглянемо варіанти опису вихідних даних в програмі  $DAN\Phi$  на прикладі конструкції. Для зручності задання вхідної введемо у розгляд сітку мінімальної густоти, відображаючи основні геометричні, фізичні та кінематичні особливості об'єкта, яку будемо називати опорною. Вузли опорної сітки на рис. 3.3 та 3.4 відмічені подвійними кругами, а сіткові координати цих вузлів представляють сукупність чисел  $(I, M1, L1)$  по першому напрямку і  $(I, K1, K2, M2)$  по другому. В цьому випадку текстовий модуль вхідної інформації має вигляд:

$$M1 = 5 \langle \rangle M2 = 9 \langle \rangle NUL = 5 \langle \rangle KZZ = 9$$

$$HMS = M1 \times M2$$

$$L1 = 3$$

$$K1 = 3 \langle \rangle K2 = 7$$

$$CALL TEL\Phi(1, 1, M1, M2, F, HMS)$$

$$CALL P\Phi L\Phi S(L1, K1, M1, K2, F, HMS)$$

$$CALL ZAKR(1, 1, 1, (M2 + 1) / 2, 2, F, HMS)$$

*CALL ZAKREP(1,1, M1, M2, 47, FTP, HMS)*

*CALL KΦΦRD(L1, K1, K2, Z, HMS)*

*CALL FUNKP(FI, FI3, NUL, KZZ)*

$G1 = E / (1 + V) \langle \rangle G2 = V / (1.2 \cdot V)$

Крім того в програмі *DANΦ* задається кількість кроків за навантаженням *IT*; параметр *EPS*, визначаючий точність вирішення систем лінійних рівнянь; логічна константа *KΦR*, негативному значенню якої відповідає рішення в лінійній постановці, додатному – в пружно – пластичній.

Обчислення вектору зовнішнього впливу  $\{Q\}$  походить виходячи з вираження варіації роботи зовнішніх сил, записаного для вузла з номером *N*:

$$\delta A = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} P^k \delta U_k \sqrt{g_{33}} dx^3 \quad (2)$$

де  $P^k$  – інтенсивність зовнішнього навантаження у вузлі вздовж координати  $x^3$ .

Виражаючи переміщення поліномами, отримуємо:

$$\delta A = \sum_{l=0}^L q_{(l)}^k \delta U_k^{(l)} \quad (3)$$

де

$$q_{(l)}^k = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} P^k \sqrt{g_{33}} dx^3 \quad (4)$$

Елементи вектора  $\{Q_l\}$  обчислюючи на основі чисельного інтегрування за формулою:

$$q_{(l)}^k = \sum_{m=1}^M (\varphi^{(l)} P^k \sqrt{g_{33}} Hm)_{(x_m^3)} \quad (5)$$

та заносяться у масив  $Q(3, HMS)$ . У змінних  $Q(K, N)$  значення індексів *K* та *N* мають той же зміст, що і при описанні поля координат. Аналогічно визначаються елементи вектора  $\{Q_l\}$  та при використанні тригонометричних рядів.

Задання інтенсивності компонентів вузлових значень зовнішнього навантаження  $P^k$  в точці інтегрування *m* для лінії, що проходить через вузол з номером *N*, виконується програмою:

*QRAΦN(K, N, MI, X, HMS)*

де параметр *MI* змінюється від *I* до *M*.

Компактність представлення та надійність засобів перетворення вхідної інформації в оперативну значно зменшує кількість помилок у вихідних даних. Контроль зводиться до перевірки несуперечності інформації, що задається та візуальному спостереженню за допомогою роздруковки масивів оперативної інформації.

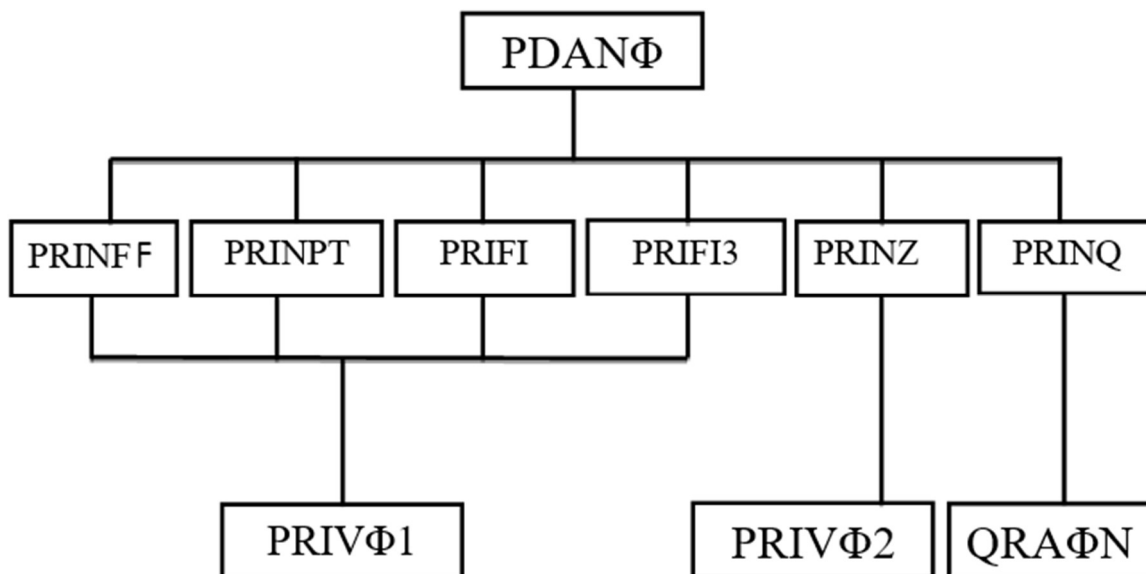


Рисунок 1 – Функціональна схема підпрограми PDANΦ  
 Figure 1 – Functional scheme of the program PDANΦ

Друк на АЦПУ топологічних, геометричних і т.п. даних здійснює гілка підпрограми PDANΦ, функціональна схема яка представлена на рис. 1. Друк масивів оперативної інформації FTP(HMS), F(HMS), FI(NUL, KZZ), FI3(NUL, KZZ), Z(2, HMS) та значення інтенсивності навантажень в точках інтегрування здійснюється програмами PRINF, PRINPT, PRIFI, PRIFI3, PRINZ, PRINQ у формі таблиці за допомогою модулів PRIVΦ1 та PRIVΦ2. Передбачено відключення друку тих чи інших масивів за набором логічних констант, що задаються в підпрограмі DANΦ.

Кінцевим результатом вирішення задачі є масиви інформації, відображаючі стан дискретної моделі в різні моменти часу, які зберігаються на зовнішніх запам'ятовуючих пристроях. Їх читає, обробляє та видає гілка програми VISHΦ, функціональна схема якої представлена на рис. 2.

При вирішенні лінійних задач звернення до програми VISHΦ відбувається один раз після вирішення системи лінійних рівнянь. Зчитування масивів вузлових переміщень та напружень, обчислених в точках інтегрування, здійснюється за допомогою програми RLENTA, їх друк виконується блоками PRINU та PRISIG відповідно.

Перетворення вихідних величин напружень, отриманих в місцевій системі координат, здійснюють модулі PRIM, PRIB та PRIG в залежності від структури об'єкта та конкретних цілей вишукування. Наприклад, при розрахунку тонкостінних конструкцій напруження краще уявляти в місцевій криволінійній системі координат та видавати на друк фізичні величини, що визначаються за формулою:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}} \quad (6)$$

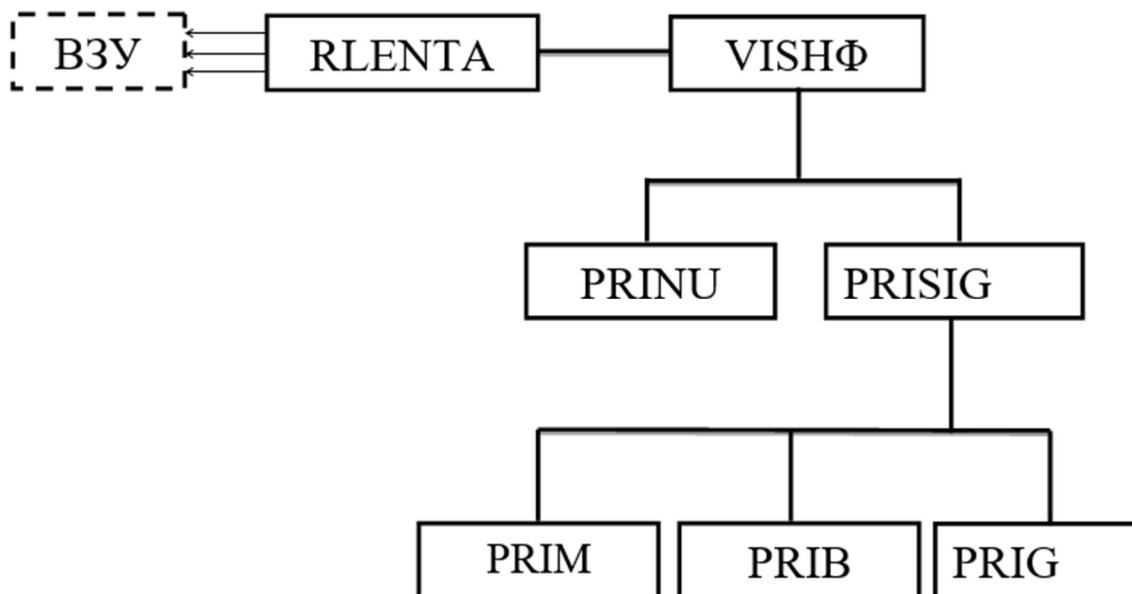


Рисунок 2 – Функціональна схема підпрограми VISHΦ  
Figure 2 – Functional scheme of the program VISHΦ

Для масивних тіл іноді виникає необхідність надрукувати напруження в глобальній системі координат. Перетворення компонент тензора напружень в цьому випадку виконується за формулою:

$$\sigma^{(m'n')} = \sigma^{ij} Z_{(i)}^{(m')} Z_{(j)}^{(n')} \quad (7)$$

Крім того для характеристики напруженого стану конструкції складної форми більше значення мають головні напруження:

$$\sigma^\alpha = \frac{\sigma^{1'1'} + \sigma^{2'2'}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^{1'1'} + \sigma^{2'2'}}{2} + (\sigma^{1'2'})^2} \quad (8)$$

Направлення площин, на які діють головні напруження, характеризуються кутом  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma^{1'2'}}{\sigma^{1'1'} - \sigma^{2'2'}} \quad (9)$$

### Висновки

При вирішенні лінійних задач звернення до *VISHΦ* здійснюється на кожному кроці навантаження. На друк видаються такі величини: номер кроку, число ітерації, переміщення вузлів сіткової області, компоненти тензора напружень, інтенсивність дотичних напружень та інтенсивність пластичних деформацій.

### Перелік посилань

1. Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95. – С. 11–20.

2. Андрієвський В.П. Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ / В.П. Андрієвський, Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 64–72.
3. Баженов В.А. Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язко-пружнопластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П. // Опір матеріалів і теорія споруд, № 78, 2006. – С.3-17.
4. Баженов В.А. Дослідження континуального, дискретного та дисперсного руйнування просторових тіл на основі напіваналітичного методу скінчених елементів / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Ільченко О.М, Рутковський В.А. // "Опір матеріалів і теорія споруд", 2002. – №70. – С.3-32.
5. Баженов В.А. Ефективність розв'язання просторових задач теорії повзучості / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Рутковський В.А. // Опір матеріалів і теорія споруд № 74, 2004 С.3–13.
6. Баженов В.А. Напружено-деформований стан і формозмінення в тілах обертання складної структури / В.А. Баженов, Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 3–12.
7. Баженов В.А. Решение пространственных задач термовязкопластичности на основе ПМКЭ / Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П. // Прикладная механика, 2009. – С.60-75.
8. Баженов В.А. Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі термов'язкопружнопластичності для неоднорідних тіл обертання / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Остапенко Р.М // Опір матеріалів і теорія споруд № 82, 2008. – С.3-29.
9. Баженов В.А. Чисельне моделювання нелінійного деформування, континуального і дискретного руйнування методом скінчених елементів /Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. // "Технологические системы" №2(13) 2002. –С.30-33.
- 10.Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія /В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
- 11.Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія /В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : «Каравела», 2014. – 236 с.
- 12.Баженов В. А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей.– К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.
- 13.Гуляр О. Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних тіл / О. Гуляр, Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 6. – С. 72–84. DOI
- 14.Іванченко Г.М. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінчених елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.
- 15.Максим'юк Ю. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108. DOI
- 16.Максим'юк Ю. Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування / Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20. DOI
- 17.Максим'юк Ю.В. Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2014. – Вип. 92. – С. 148–156.
- 18.Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2015. – Вип. 94. – С. 244–251.

19. Максим'юк Ю.В. Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності / Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 96. – С. 148–157.

20. Метод скінчених елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / [Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2018. – 316с.

21. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк, А.Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 59–75.

22. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гуляр [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 92. – С. 3–16.

23. Пискунов С.О. Визначення напружено-деформованого стану тіл обертання із використанням кругового скінченого елемента змінної площі поперечного перерізу / Пискунов С.О., Мицюк С.В., Шкриль О.О. // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2007. – Вып. 71. – С. 198-203.

24. Пискунов С.О. Призматичний скінчений елемент змінної геометрії / Пискунов С.О., Рутковский В.А., Шкриль О.О. // Опір матеріалів і теорія споруд. Наук.- техн. збірник – К.: КНУБА, 2005.- Вип.. 76, 2005. – С.83–90. Розгалуження

25. Maksimyyuk Yu.V. Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies/ Yu.V. Maksimyyuk, S.O. Pyskunov, A.A. Shkril', O.V. Maksimyyuk // Опір матеріалів і теорія споруд– 2020. – Вип. 104. – С. 255–264.

## **STRUCTURE OF THE COMPUTER COMPLEX FOR CALCULATING THE STRENGTH OF PRISMATIC BODIES BASED ON THE SEMI-ANALYTIC METHOD OF FINITE ELEMENTS**

**Kuz'minets' Mykola P.**, doktor tekhnichnykh nauk, profesor, zaviduvach kafedroyu komp'yuternoyi, inzhenernoyi hrafiky ta dyzaynu, Natsional'nyy transportnyy universytet, Kyiv, Ukrayina, e-mail: kuzminecmp@ukr.net, tel. +380983600812, Ukrayina, 01103, m. Kyiv, vul. M. Boychuka, 40A.

<https://orcid.org/0009-0001-1841-694X>

**Maksym'yuk Yuriy V.**, doktor tekhnichnykh nauk, profesor, profesor kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyivskyy natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv. <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

**Martynyuk Ivan YU.**, kandydat tekhnichnykh nauk, doktorant kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyivskyy natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv. <https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

**Stepanenko Tetyana S.**, dotsent kafedry komp'yuternoyi, inzhenernoyi hrafiky ta dyzaynu, Natsional'nyy transportnyy universytet, Kyiv, Ukrayina. <https://orcid.org/0009-0009-2304-9783>

**Abstract.** One of the main and responsible stages of creating an apparatus for numerical analysis of structures using the finite element method is its implementation in the form of a set of programs. The principles of complex construction should take into account modern requirements for strength calculation software in modern calculation complexes. Among them, first of all, automation of the main stages of the computing process, rational use of the resources of the operating and external memory of storage devices, non-closedness in relation to the classes of problems to be solved, algorithms for the task of input data, the method of discretization and solution of systems of equations and etc. In addition, the structure of the programs should take into account the specifics of the semi-analytical method of finite elements, for which such a large experience of creating developed systems of mathematical support for the search of spatial structures has not yet been accumulated, as when using the traditional version of FEM. Considerable experience in solving finite element mechanics problems, accumulated over the past decades, has been reflected in a number of industrial commercial software complexes of domestic (LIRA, SCAD) and foreign (ANSYS, Nastran, ABAQUS) production. The developed finite element base of these software complexes allows you to obtain solutions to a wide range of problems of the mechanics of a deformable rigid body for objects of different dimensions.

Наук. журн. «АВТОМОБІЛЬНІ ДОРОГИ І ДОРОЖНЄ БУДІВНИЦТВО», 2023. Випуск 113. Частина 2.  
ISSN 0365-8171 (Print), ISSN 2707-4080 (Online), ISSN 2707-4099 (CD), <http://addb.ntu.edu.ua>.  
Scientific journal «AUTOMOBILE ROADS AND ROAD CONSTRUCTION», 2023. Issue 113. Part 2.



including for massive spatial bodies, and convenient means of input-output of information and processing of the obtained results make them very accessible to a wide circles of users and allow to display the obtained results with the maximum degree of visibility. There are also object-oriented complexes created at manufacturing enterprises and research institutes, for example at the Institute of Strength Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, at the Dnipropetrovsk National University.

The conducted research will determine the most optimal ways of solving the listed problems from the point of view of computing costs and complexity of implementation, as well as outline the circle of unsolved issues.

**Keywords.** Finite element method (FEM), semi-analytic finite element method (SFEM), Fourier series, massive, thin-walled prismatic bodies, vector of nodal reactions, coefficients of the stiffness matrix.

### References

1. Alhorytm rozv'iazannia visesymetrychnykh zadach nestatsionarnoi teploprovodnosti / O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksymiuk [ta in.] // *Opir materialiv i teoriia sporud.* – 2015. – Vyp. 95. – S. 11–20.
2. Andriievskiy V.P. Metodyka rozv'iazannia visesymetrychnykh zadach stacionarnoi teploprovodnosti ta termoprzhnosti na osnovi MSSE / V.P. Andriievskiy, Yu.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud.* – 2014. – Vyp. 93. – S. 64–72.
3. Bazhenov V.A. Alhorytm rozv'iazannia prostorovoi zadachi termoviazko-pruzhnoplastychnosti pryzmatychnykh til z urakhuvanniam poshkodzhennosti / Bazhenov V.A., Huliar O.I., Pyskunov S.O., Andriievskiy V.P. // *Opir materialiv i teoriia sporud*, № 78, 2006. – S.3-17.
4. Bazhenov V.A. Doslidzhennia kontynualnoho, dyskretnoho ta dyspersnoho ruinovannia prostorovykh til na osnovi napivanalitichnoho metodu skinchennykh elementiv / Bazhenov V.A., Huliar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S., Ilchenko O.M, Rutkovskiy V.A. // "Opir materialiv i teoriia sporud", 2002. – №70. – S.3-32.
5. Bazhenov V.A. Efektyvnist rozv'iazannia prostorovykh zadach teorii povzuchosti / Bazhenov V.A., Huliar O.I., Pyskunov S.O., Rutkovskiy V.A. // *Opir materialiv i teoriia sporud* № 74, 2004 S.3–13.
6. Bazhenov V.A. Napruzhenno-deformovanyi stan i formozminennia v tilakh obertannia skladnoi struktury / V.A. Bazhenov, Yu.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud* – 2019. – Vyp. 102. – S. 3–12.
7. Bazhenov V.A. Reshenye prostranstvennykh zadach termoviazkoplastychnosti na osnove PMKЭ / Bazhenov V.A., Huliar A.Y., Pyskunov S.O., Andryevskiy V.P. // *Prykladnaia mekhanyka*, 2009. – S.60-75.
8. Bazhenov V.A. Rozrakhunkovi spivvidnoshennia NMSE prostorovoi zadachi termoviazkopruzhnoplastychnosti dlia neodnorodnykh til obertannia / Bazhenov V.A., Huliar O.I., Pyskunov S.O., Ostapenko R.M // *Opir materialiv i teoriia sporud* № 82, 2008. – S.3-29.
9. Bazhenov V.A. Chyselne modeliuвання neliniinoho deformuvannia, kontynualnoho i dyskretnoho ruinovannia metodom skinchennykh elementiv /Bazhenov V.A., Huliar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S. // "Tekhnolohycheskye systemy" №2(13) 2002. –S.30-33.
10. Bazhenov V. A. Napivanalitichnyi metod skinchennykh elementiv v zadachakh ruinovannia prostorovykh til: Monohrafiia /V.A. Bazhenov, O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov – K. : KNUBA, 2005. – 298 s.
11. Bazhenov V. A. Napivanalitichnyi metod skinchennykh elementiv v zadachakh kontynualnoho ruinovannia prostorovykh til: Monohrafiia /V.A. Bazhenov, O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov – K. : «Karavela», 2014. – 236 s.
12. Bazhenov V. A. Neliniine deformuvannia ta stiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury / V. A. Bazhenov, O. P. Kryvenko, M. O. Solovei.– K. : ZAT «Vipol», 2010. – 315 s.
13. Huliar O. Universalnyi pryzmatychnyi skinchenyi element zahalnoho typu dlia fizychno i heometrychno neliniinykh zadach deformuvannia pryzmatychnykh til / O. Huliar, Yu. Maksymiuk, A. Kozak, O. Maksymiuk // *Budivelni konstruktsii teoriia i praktyka* – 2020. – Vyp. 6. – S. 72–84. DOI
14. Ivanchenko H.M. Pobudova rozv'iazuvalnykh rivnian napivanalitichnoho metodu skinchennykh elementiv dlia pryzmatychnykh til skladnoi formy / H.M. Ivanchenko, Yu.V. Maksymiuk, A.A. Kozak, I.Iu. Martyniuk // *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system: Nauk.-tekhn. zbirn.* – K.: KNUBA, 2021 – Vyp.46 – S. 55-62.

15. Maksymiuk Yu. Osoblyvosti vyvedennia formul dlia obchyslennia vuzlovykh reaktsii i koefitsiientiv matrytsi zhorstkosti skinchenoho elementa z userednenymy mekhanichnymy i heometrychnymy parametramy / Yu. Maksymiuk, A. Kozak, I. Martyniuk, O. Maksymiuk // Budivelni konstruktzii teoriia i praktyka. – 2021. – Vyp. 8. – S. 97–108. DOI

16. Maksymiuk Yu. Rozviazuvalni spivvidnoshennia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv v zadachakh termoviazkopruzhnoplastychnoho deformuvannia / Yu. Maksymiuk, A. Kozak, O. Maksymiuk // Budivelni konstruktzii teoriia i praktyka – 2019. – Vyp. 4. – S. 10–20. DOI

17. Maksymiuk Yu.V. Alhorytm rozviazku zadach neliniinoho deformuvannia ta stiikosti pruzhnoplastychnykh visesymetrychnykh obolonok serednoi tovshchyny / Yu.V Maksymiuk // Opir materialiv i teoriia sporud – 2014. – Vyp. 92. – S. 148–156.

18. Maksymiuk Yu.V. Rozrakhunkovi spivvidnoshennia universalnogo skinchenoho elementa na osnovi momentnoi skhemy skinchenykh elementiv / Yu.V Maksymiuk // Opir materialiv i teoriia sporud – 2015. – Vyp. 94. – S. 244–251.

19. Maksymiuk Yu.V. Skinchenyi element zahalnoho typu dlia rozviazku visesymetrychnoi zadachi nestatsionarnoi teploprovodnosti / Yu.V Maksymiuk // Opir materialiv i teoriia sporud – 2016. – Vyp. 96. – S. 148–157.

20. Metod skinchenykh elementiv u zadachakh deformuvannia ta ruinuvannia til obertannia pry termosylovomu navantazhenni / [Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Maksymiuk Yu.V.] – Kyiv: Vyd-vo “Karavela”, 2018. – 316s.

21. Osoblyvosti vykorystannia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry liniinykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn / S.O. Pyskunov, I.I. Solodei, Yu.V Maksymiuk, A.D. Solodenko // Opir materialiv i teoriia sporud. – 2013. – Vyp. 91. – S. 59–75.

22. Osoblyvosti vykorystannia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry neliniinykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn / V.A. Bazhenov, O.S. Sakharov, O.I. Huliar [ta in.] // Opir materialiv i teoriia sporud. – 2014. – Vyp. 92. – S. 3–16.

23. Pyskunov S.O. Vyznachennia napruzhenno-deformovanoho stanu til obertannia iz vykorystanniam kruhovoho skinchenoho elementa zminnoi ploshchi poperechnoho pererizu / Pyskunov S.O., Mytsiuk S.V., Shkryl O.O. // Heotekhnicheskai mekhanyka. – Dnepropetrovsk, 2007. – Vyp. 71. – S. 198-203.

24. Pyskunov S.O. Pryzmatychnyi skinchenyi element zminnoi heometrii / Pyskunov S.O., Rutkovskiy V.A., Shkryl O.O. // Opir materialiv i teoriia sporud. Nauk.- tekhn. zbirnyk – K.: KNUBA, 2005.- Vyp.. 76, 2005. – S.83–90. Rozghaluzhennia.

25. Maksymyuk Yu.V. Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies/ Yu.V. Maksymyuk, S.O. Pyskunov, A.A. Shkryl, O.V. Maksymyuk // Opir materialiv i teoriia sporud– 2020. – Vyp. 104. – S. 255–264.

*Надійшла до редакції 10.06.2023.*