

КЛАСИФІКАЦІЯ ХАОТИЧНИХ КАСКАДНИХ СИСТЕМ З ТОЧКИ ЗОРУ ЕКОЛОГІЇ

THE CATEGORIZATION OF THE CHAOTIC MAPS WITH STANDPOINT OF THE  
ECOLOGIES



*Артеменко Владислав Андрійович, UT5UDJ, магістр екології, науковий співробітник відділу гідрохімії, Український гідрометеорологічний інститут Державної служби України з надзвичайних ситуацій та Національної академії наук України, e-mail: [artemenko@uhmi.org.ua](mailto:artemenko@uhmi.org.ua), тел. 380936011250, м. Київ, Україна*

<https://orcid.org/0000-0003-0536-5415>



*Петровиц Володимир Васильович, кандидат технічних наук, професор, старший науковий співробітник, професор кафедри транспортного будівництва та управління майном, Національний транспортний університет. e-mail: [petrovichvv60@ukr.net](mailto:petrovichvv60@ukr.net), тел. +380442807338, м. Київ, Україна*

<https://orcid.org/0000-0003-0422-2535>

**Анотація.** На сучасному етапі досліджень в екології у якості математичних моделей використовують системи різницевих рівнянь з хаотичною поведінкою (каскадні хаотичні динамічні системи). Наявність детермінованого (динамічного) хаосу в таких системах звичайно визначають із позицій старшого “глобального” показника Ляпунова  $\lambda_1$ . В системах присутній детермінований хаос, якщо  $\lambda_1 > 0$  (при виконанні деяких додаткових умов).

В дослідженні при визначенні спектру як “глобальних”, так і локальних показників Ляпунова був використаний QR-метод.

Із використанням QR-метода проведені дослідження багатьох каскадних динамічних систем (в роботі, як приклад, розглянуті тільки два представника таких систем).

В ході проведення досліджень з’ясувалось, що множину таких каскадних динамічних систем можливо розподілити на два класи (клас I та клас II).

Клас I мають позитивні старші “глобальні” показники Ляпунова. При цьому локальні старші показники можуть приймати нульові та негативні значення.

Клас II мають позитивні “глобальні” старші показники Ляпунова, але при цьому локальні старші показники приймають виключно позитивні, значення.

Дослідження багатьох систем класу I та класу II показали, що переважну більшість представників класу II неможливо адекватно спрогнозувати відомими на даний період часу методами (навіть на одну точку вперед).

Таким чином, якщо екологічна модель базується на системі класу II, прогнозування на базі такої моделі у більшості своїй неможлива.

Для адекватного прогнозування слід у якості екологічних використовувати виключно моделі, що засновані на системах класу I.

**Мета роботи.** Метою роботи є створення принципово нової класифікації хаотичних каскадних систем (систем різницевих рівнянь).

Необхідно показати, що існує два класи таких систем, при яких одна із систем не може бути спрогнозована жодним із відомих на цей час методів.

**Ключові слова:** детермінований хаос в екології, локальні та глобальні показники Ляпунова, QR-метод визначення спектру показників Ляпунова, класифікація хаотичних каскадних систем.

*Метод необхідний для відшукування істини*

*Р. Декарт*

*Будь-яка задовільна класифікація –*

*це перший крок на шляху всякого пізнання.*

*К. Тимірязєв*

### Вступ

Одна із головних наукових подій кінця 20-го сторіччя – це, безумовно, відкриття та подальша розробка теорії детермінованого хаосу.

Практичне застосування ідей детермінованого хаосу дозволило отримати результати, які раніше неможливо було навіть прогнозувати.

Слід відмітити, що на початковій стадії досліджень детермінованого хаосу певну роль відіграли моделі, які були попередньо задіяні у екології.

Як відомо, детермінований хаос звичайно визначають із позиції показника (показників) Ляпунова [1].

Наявність навіть одного позитивного показника в спектрі показників Ляпунова вже свідчить про появу в системі детермінованого хаосу.

На практиці спектр показників Ляпунова визначають вздовж усієї траєкторії динамічної системи, отримуючи відносно довгі ряди значень “миттєвих” (локальних) показників. Далі, визначаючи середнє для цих рядів, обчислюють “глобальні” показники Ляпунова.

Остаточне рішення про детерміновано-хаотичну поведінку системи одержують, використовуючи “глобальні” (усереднені) показники.

На сучасному рівні досліджень в екології достатньо часто використовують моделі на основі різницевих рівнянь (каскадних динамічних систем).

У роботі пропонується класифікація таких систем.

Така класифікація, наскільки нам відомо, у відповідній науковій літературі не розглядалась.

### Виклад основного матеріалу.

#### **Особливості поведінки детерміновано-хаотичної каскадної системи типу (1)**

Розглянемо далі, як приклад, відоме “відображення Хенона”, де, згідно [2],

$$A(N + 1) = 1 - k\emptyset 1 \cdot A(N)^2 + B(N),$$

$$B(N + 1) = k\emptyset 2 \cdot A(N). \quad (1)$$

У рівняннях (1) величини А,В – динамічні змінні,  $k\emptyset 1 = 1.4$  та  $k\emptyset 2 = 0.3$  – коефіцієнти (параметри). Початкові умови:  $A(1) = 0.1$  та  $B(1) = 0.2$ .

При визначенні спектру “глобальних” (середніх за траєкторією) показників знаходили також рішення системи (1). Для цього авторами була написана спеціальна програма на мові програмування MATLAB.

З метою усунення “перехідних явищ” спочатку виконувалось 10000 ітерацій.

Послідуючі ітерації вже були спрямовані безпосередньо на знаходження відповідного рішення системи (1) та показників Ляпунова. Таких ітерацій було також проведено 10000.

Для визначення показників Ляпунова використовували QR-метод [3, 4], який вимагав визначити попередньо “матрицю Якобі” часткових похідних системи (1) у аналітичному вигляді.

При цьому “матриця Якобі” мала вигляд

$$J = \begin{bmatrix} -2 \cdot k\phi 1 \cdot A & 1 \\ k\phi 2 & \phi \end{bmatrix}$$

Атрактор системи (1) – це хаотичний атрактор, що підтверджується визначеним спектром  $\lambda_1 = +0.4138$  та  $\lambda_2 = -1.6177$  цих показників.

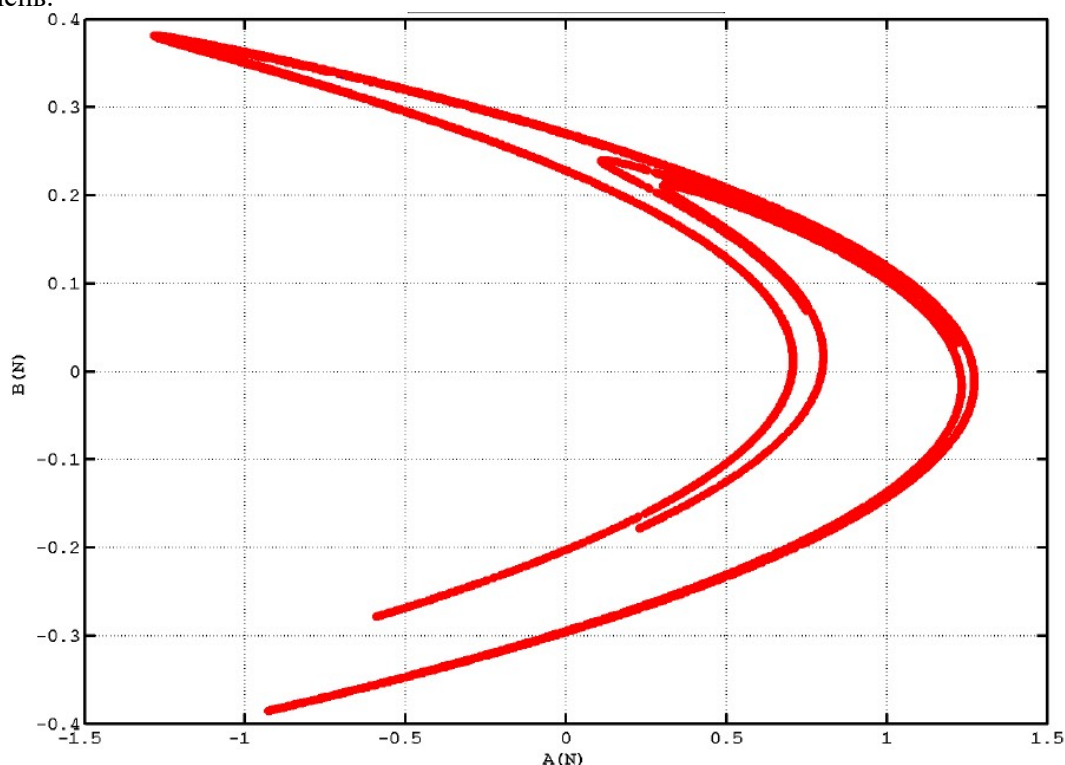
На рис.2 наведений ряд локальних значень для  $\lambda_1$  системи (1).

Як видно із рис.2, деякі локальні показники досягають значення +1.25. Значення -1.5 ... -2.0 також зустрічаються, але у меншій кількості.

Для локальних показників  $\lambda_2$  маємо переважну більшість від'ємних значень (середнє по ряду значення  $\lambda_2$  складає -1.6177).

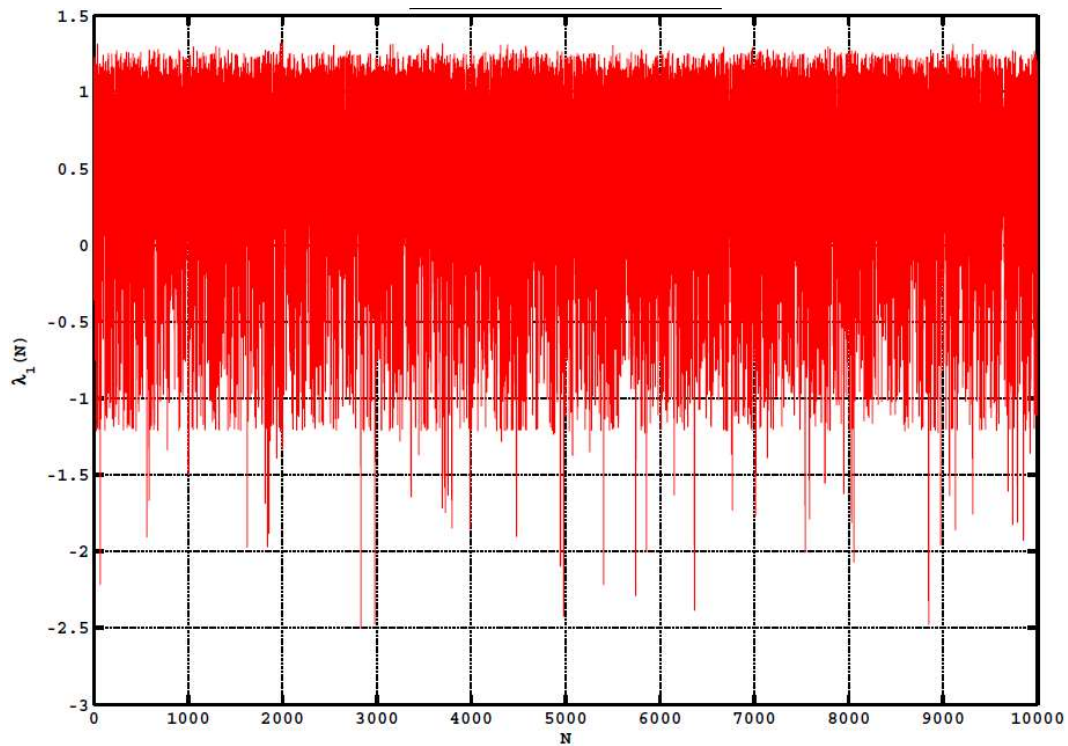
Зазначимо, що маючи ряди локальних показників Ляпунова, можливо безпосередньо знаходити довірчі інтервали для  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ . Такі інтервали легко визначити за допомогою метода непараметричного бутстрепа [5, 6].

Попередньо отримані дані для  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  має сенс аналізувати також із позицій ймовірнісних розподілень.

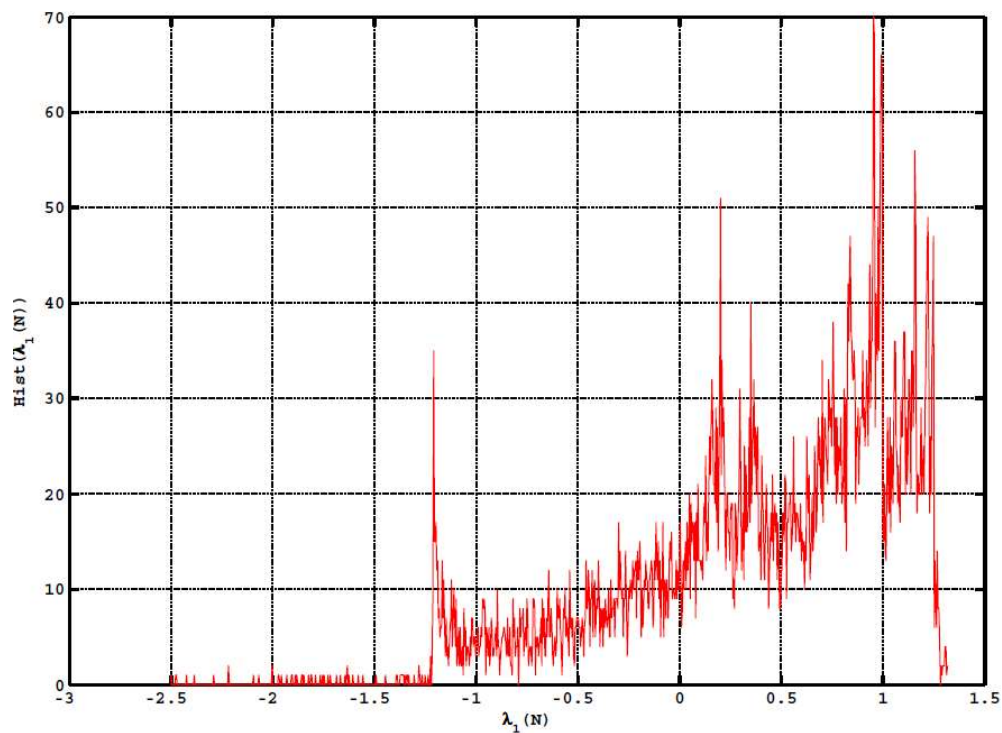


**Рисунок 1** – Хаотичний атрактор для системи (1)  
**Figure 1** – Chaotic attractor for System (1)

На рис.3 наведена гістограма для локальних показників  $\lambda_1$ , на рис.4 – гістограма для локальних показників  $\lambda_2$ . Крім того, можлива побудова залежностей цих показників від рішень системи (1). Це можуть бути як двовимірні, так і трьохвимірні графіки.



**Рисунок 2** – Ряд локальних значень  $\lambda_1(N)$  для системи (1)  
**Figure 2** – The series of local Lyapunov exponents  $\lambda_1(N)$  for system (1)



**Рисунок 3** – Гістограма для ряду локальних значень  $\lambda_1(N)$  системи (1)  
**Figure 3** – The histogram for series of local Lyapunov exponents  $\lambda_1(N)$  for system (1)

На рис.5 поданий графік залежності локальних значень  $\lambda_1$  від координати  $A$  рішення (1), на рис.6 – залежність  $\lambda_2$  від координати  $B$ . При цьому система (1) генерує хаотичні часові ряди для змінних  $A$  та  $B$  за наявності лише певних коефіцієнтів та початкових умов.

Можливо також стверджувати, що локальні показники Ляпунова також можуть самі бути детерміновано-хаотичними рядами (якщо не для системи (1), то, у крайньому разі, для деяких інших подібних систем).

У загальному випадку, якщо невідомі формули для таких рядів, слід використовувати клас алгоритмів, які не вимагають знання певних аналітичних формул [7, 8].

***Особливості поведінки детерміновано-хаотичної каскадної системи типу (2).***

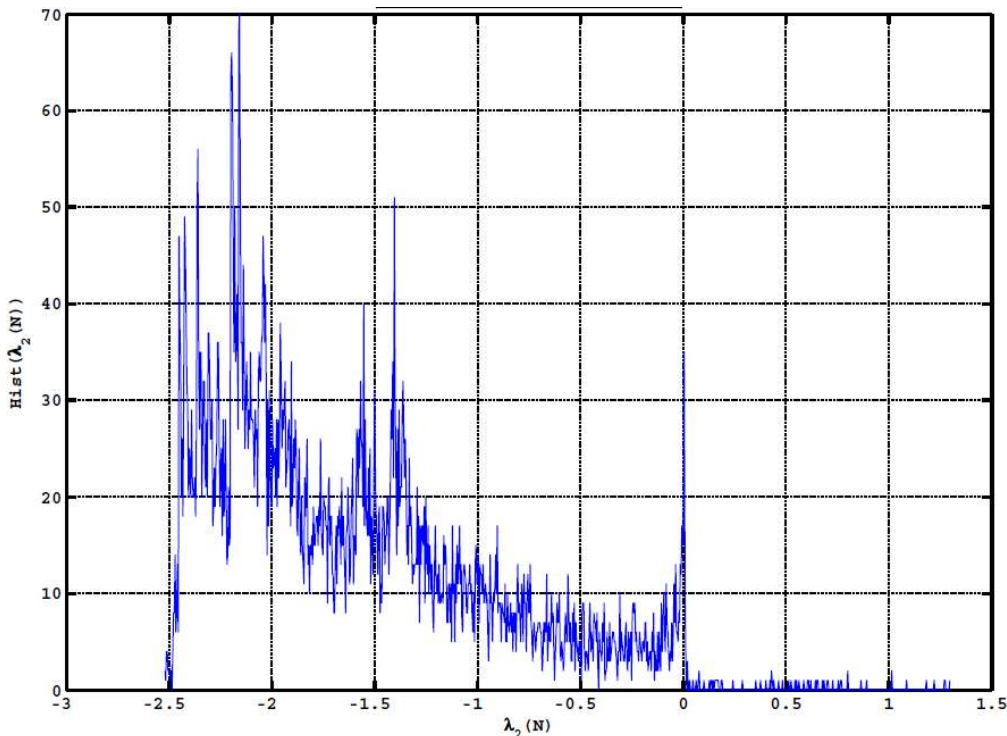
Розглянута поведінка системи (1) – це тільки один із типів поведінки хаотичної каскадної системи. Існує також детерміновано-хаотична каскадна система, яка демонструє поведінку із деяких позицій як повністю протилежна приведеній вище.

Розглянемо каскад виду

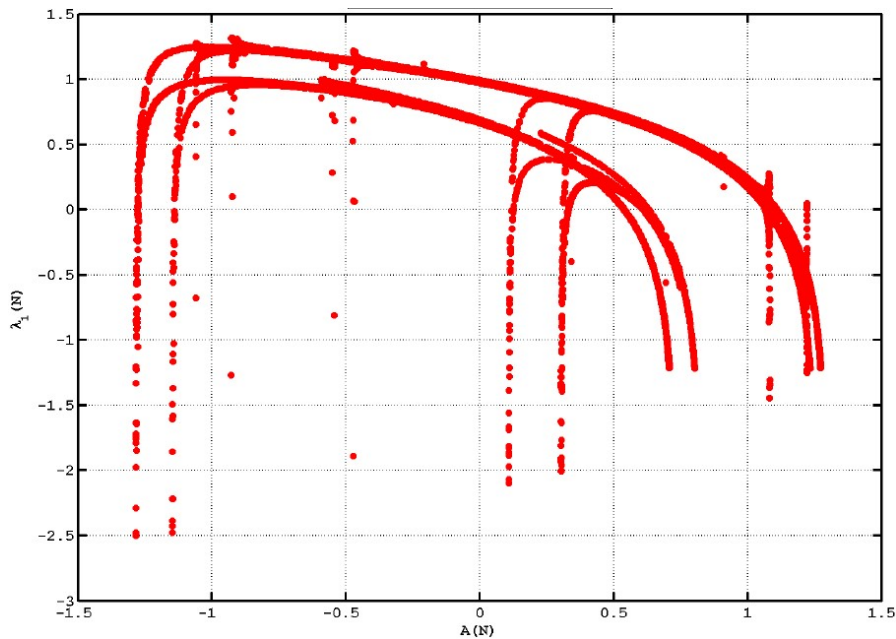
$$\begin{aligned} A(N + 1) &= 1 + k\phi_1 \cdot A(N) + k\phi_2 \cdot |B(N)| \\ B(N + 1) &= 1 + k\phi_1 \cdot B(N) + k\phi_2 \cdot |A(N)|, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $A, B$  – динамічні змінні,  $k\phi_1 = +.2300$ ,  $k\phi_2 = -1.4990$ .

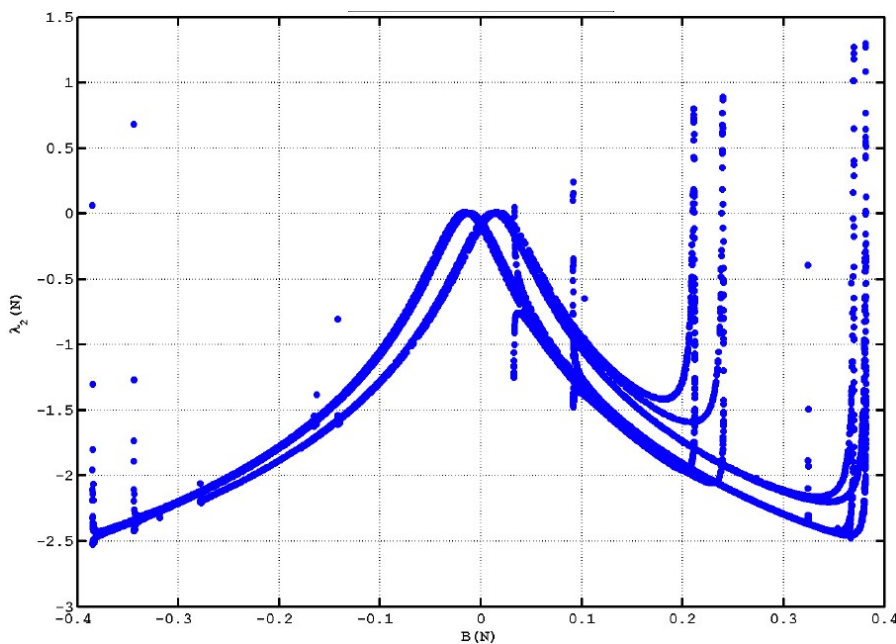
Початкові умови:  $A(1) = 0.1$  та  $B(1) = 0.2$ .



**Рисунок 4 – Гістограма для ряду локальних значень  $\lambda_2(N)$  системи (1)  
Figure 4 – The histogram for series of local Lyapunov exponents  $\lambda_2(N)$  for system (1)**



**Рисунок 5** – Графік залежності локальних значень  $\lambda_1(N)$  від координат  $A$  рішення системи (1)  
**Figure 5** – The graph to dependencies of local Lyapunov exponents  $\lambda_1(N)$  from the coodinats  $A$  system (1) solutions



**Рисунок 6** – Графік залежності локальних значень  $\lambda_2(N)$  від координат  $B$  рішення системи (1)  
**Figure 6** – The graph to dependencies of local Lyapunov exponents  $\lambda_2(N)$  from the coodinats  $B$  system (1) solutions

Далі виконували відповідне число ітерацій (10000)з метою усунення перехідних явищ.  
Наступні 10000 ітерацій проводили для знаходження рішення та показників Ляпунова системи (2).

Використовувався QR-метод.

В цьому зв'язку необхідно було також попередньо знайти “матрицю Якобі” часткових похідних для системи (2) у аналітичному вигляді.

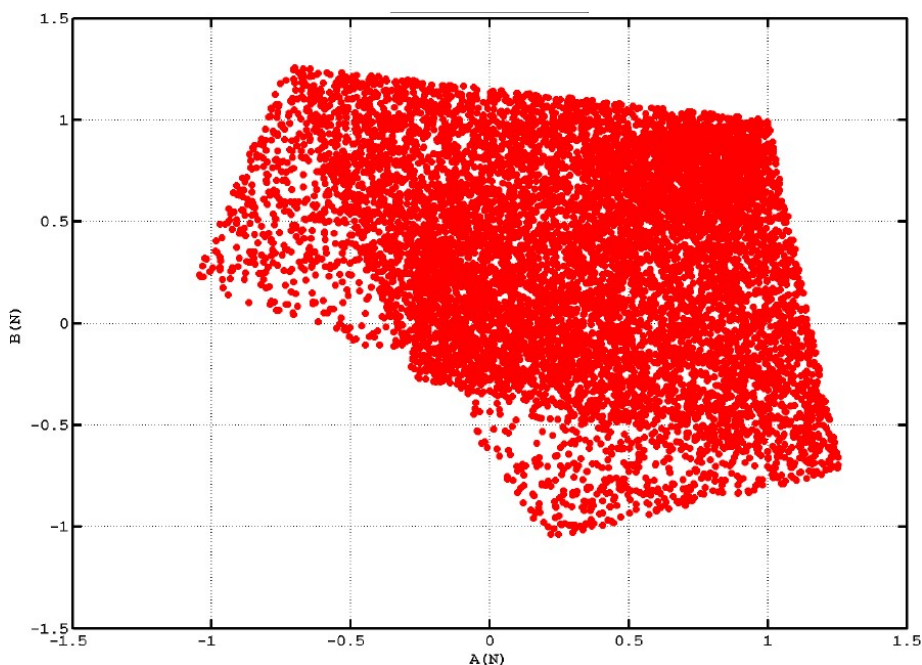
Для системи (2) “матриця Якобі” має вигляд

$$J = \begin{bmatrix} k\phi 1 & k\phi 2 \cdot \text{sign}(B) \\ k\phi 2 \cdot \text{sign}(A) & k\phi 1 \end{bmatrix}.$$

Вид хаотичного аттрактора системи (2) наведений на рис.7. Візуально аттрактор системи схожий на хаотичний, однак при цьому займає істотно більшу площину простору, ніж аттрактор системи (1).

Однак висновки про хаотичність даного аттрактора можуть бути зроблені лише при знаходженні двох відповідних показників Ляпунова, оскільки кількість показників повинна дорівнювати числу динамічних змінних системи.

У даному випадку QR-метод дає наступний результат:  $\lambda_1 = +\phi.4073$  та  $\lambda_2 = +\phi.3923$ .



**Рисунок 7** – Хаотичний аттрактор для системи (2)

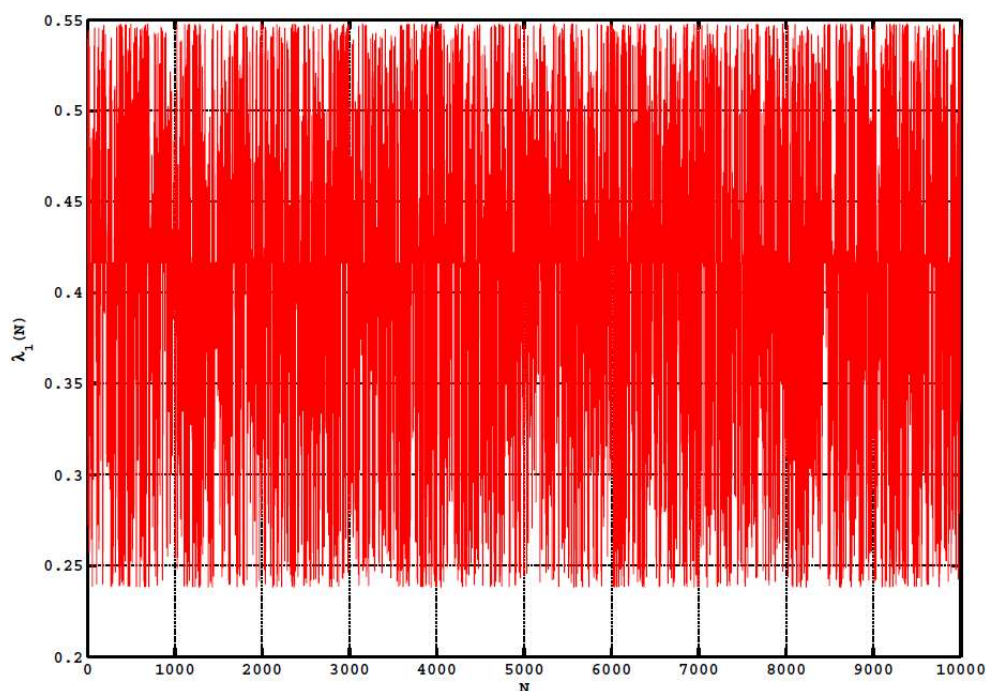
**Figure 7** – Chaotic attractor for system (2)

На відміну від попереднього прикладу, в системі (2) присутні два додатних показника Ляпунова. Відповідно, висновок про хаотичність вже можливо зробити, знаючи “старший показник”  $\lambda_1$ . Виконання одночасно умов  $\lambda_1 > 0$  та  $\lambda_2 > 0$  свідчить про гіперхаотичність поведінки системи (2).

Зазначимо, що у загальному випадку динамічна система може мати не один аттрактор. Вихід на той або інший аттрактор буде залежати від початкових умов системи.

На рис. 8 маємо графік ряду локальних значень для  $\lambda_1$  системи (2).

Як видно, не один із локальних показників  $\lambda_1$  не приймає від’ємних або навіть нульових значень. При цьому всі локальні значення  $\lambda_1$  більше значення  $+\phi.2$ .



**Рисунок 8** – Ряд локальних значень  $\lambda_1(N)$  для системи (2)

**Figure 8** – The series of local Lyapunov exponents  $\lambda_1(N)$  for system (2)

Визначені локальні значення  $\lambda_2$  також більше величини  $+\phi$ .

Таким чином, із позицій поведінки рядів локальних показників  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ , система (2) та система (1) – це якісно різні системи.

На рис.9 приведена гістограма розподілення показників  $\lambda_1(N)$  системи (2). Як видно із рисунку, переважна більшість локальних показників  $\lambda_1$  практично сконцентрована біля одного значення.

Це також певним чином свідчить про якісну відмінність систем (1) та (2).

Подібний вид графіка також притаманний залежності  $\lambda_2$ .

Графік на рис. 10 ілюструє залежність локальних значень  $\lambda_1$  від координати  $A$  рішення (2).

На рисунку чітко видно горизонтальну лінію, яка відповідає піку на гістограмах.

Наведені вище рисунки демонструють якісні відмінності у поведінці систем (1) та (2) із позицій локальних показників Ляпунова.

#### **Класифікація хаотичних каскадних систем**

Розглянута вище поведінка систем (1) та (2) – це тільки один з типів поведінки хаотичних каскадних систем.

На базі попередньо проведених досліджень вперше був запропонований поділ хаотичних каскадних систем на два класи.

З метою спрощення класифікацію можливо розглядати також на основі тільки значень старших “глобальних” показників Ляпунова.

Клас I має позитивний старший “глобальний” показник Ляпунова.

При цьому локальні старші показники можуть приймати як нульові, так і негативні значення.

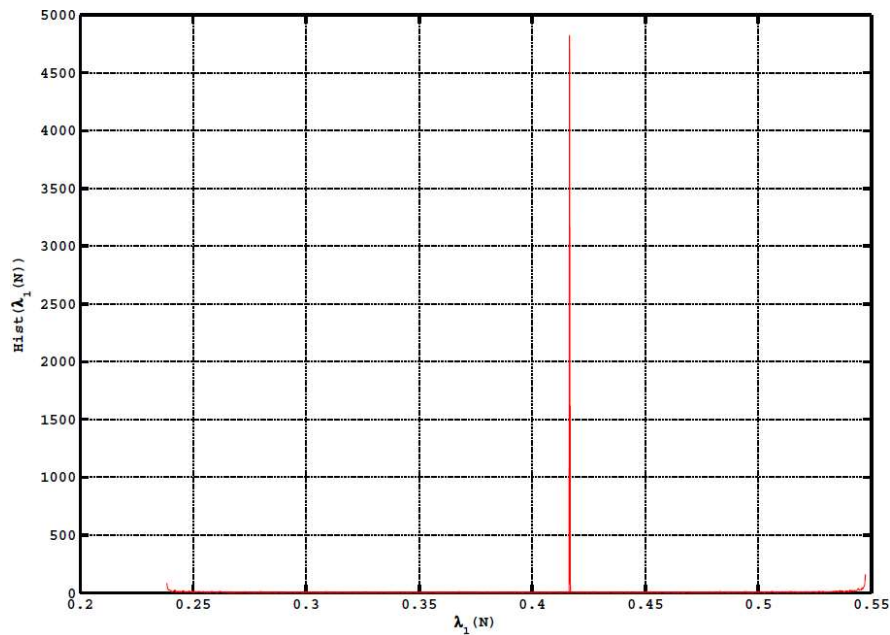
Клас II має позитивний старший “глобальний” показник.

Всі локальні старші показники Ляпунова можуть приймати тільки позитивні значення.

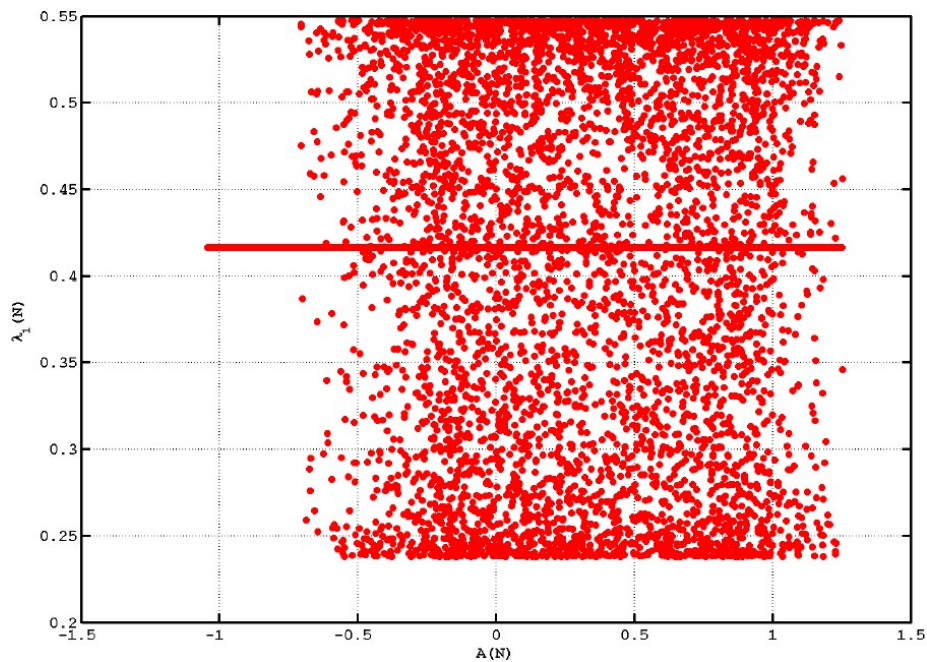
Як відомо, одна з головних задач в екології – це задача прогнозування (екологічного прогнозування). На базі теорії хаотичної динаміки розроблено достатнє число практичних методів прогнозування хаотичних часових рядів.

Слід зазначити, що хаотичні часові ряди можуть адекватно прогнозуватись тільки на певне число кроків вперед (на так званий “горизонт прогнозованості”).





**Рисунок 9** – Гістограма для ряду локальних значень  $\lambda_1(N)$  системи (2)  
**Figure 9** – The histogram for series of local Lyapunov exponents  $\lambda_1(N)$  for system (2)



**Рисунок 10** – Графік залежності локальних значень  $\lambda_1(N)$  від координат  $A$  рішення системи (2)  
**Figure 10** – The graph to dependencies of local Lyapunov exponents  $\lambda_1(N)$  from the coodinats  $A$  system (2) solutions

Динамічні системи класу I прогноуються з достатньою для практики точністю на 10, або навіть більше кроків (точок) вперед [9]. Такі системи переважно обговорюються та аналізуються у відповідній науковій літературі.

При цьому практично не згадується про можливість прогнозування хаотичних динамічних систем класу II.

У даному дослідженні вперше показано, що існує цілий клас детерміновано-хаотичних рядів, які неможливо адекватно спрогнозувати навіть на один крок (одну точку) вперед.

Це хаотичні системи класу II.

Слід відмітити також тонкощі, які існують при визначенні “глобальних” показників Ляпунова для систем класу II. Так, при використанні QR-метода можливо визначити “матрицю Якобі” не тільки статично (див. вище), але також і динамічно, коли сама програма в процесі її роботи формує цю матрицю за певними правилами.

“Динамічне” формування “матриці Якобі”, очевидно, виправдовує себе при використанні багатовимірних динамічних систем, тобто коли число змінних буде більше, ніж 3 ... 4.

При цьому для систем класу II існує велика різниця в тому, як була сформована сама “матриця Якобі”. При різних способах формування матриці задіяно значне число операцій із “плаваючою крапкою”, що для систем з хаотичною динамікою може призводити до відповідних негативних наслідків.

Тому при знаходженні “глобальних” показників Ляпунова у більшості подібних програм (алгоритмів) слід використовувати метод “подвійного усереднення”, що частково усуває ці наслідки.

В результаті проведених досліджень одержані принципово нові результати, які раніше не знайшли свого відображення у літературі.

### **Висновки**

1. Розроблена класифікація хаотичних каскадних систем.

2. Пропонується всі каскадні хаотичні системи поділити на два класи.

Клас I, де локальні старші показники можуть приймати як позитивні, так і негативні величини (при істотно позитивному “глобальному” старшому показнику Ляпунова).

Клас II, де “глобальні” та локальні старші показники можуть приймати тільки позитивні величини.

3. Аналізуються властивості деяких представників класу I та класу II.

4. Розглянуті проблеми, що виникають при визначенні глобальних показників Ляпунова числовими методами. Запропоновані шляхи подолання цих проблем.

5. Приведені можливості екологічного прогнозування при використанні моделей класу I та класу II. Встановлено, що прогнозування при використанні моделей класу II виявляється практично неможливим (навіть на один крок вперед).

### **Перелік посилань**

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. – 424 с.
2. Henon M. A two – dimensional mapping with a strange attractor. Commun path Phys. 50, – 1976, 69-77.
3. Geist K., Parlitz U., Lanteborn W. Comparison of Different methods for Computing Lyapunov exponents. – Progress of theoretical physics, Vol. 83, №5, May 1990, 875-893.
4. Von Bremen H., Udwardia F.E., Proskurowski W. An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents. Physica D, 101, 1997, 1-16.
5. Ziehmann C., Smith L.A., Kurths J. The bootstrap and Lyapunov exponents in deterministic chaos. Physica D, 126, 1999, 49-59.
6. Артеменко В.А., Петрович В.В. Нова концепція хеометрики. – Автомобільні дороги і дорожнє будівництво, DOI:10.33744/0365-8171-2023-114.1-117-132, вип. 113. – Київ, 2023. С.118-133.

7. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16D, 1985, 285-317.

8. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*, 16, 1993, 117-134.

9. Артеменко В.А., Петрович В.В. Про прогнозованість гідрологічних часових рядів. – Автомобільні дороги і дорожнє будівництво, DOI:10.33744/0365-8171-2023-111-126-132, вип. 111. – Київ, 2022. С.126-132.

## THE CATEGORIZATION OF THE CHAOTIC MAPS WITH STANDPOINT OF THE ECOLOGIES

**Artemenko Vladuslav A., UT5UDJ**, Master of Ecology, Ukrainian Hydrometeorological Institute, State Service on Emergencies of Ukraine and National Academy of Science of Ukraine, Hydrochemical Research, Scientific Employee, e-mail: [artemenko@uhmi.org.ua](mailto:artemenko@uhmi.org.ua), tel. 380936011250, Nauki avenue, 37, Kyiv, Ukraine, 03028, room 34, <https://orcid.org/0000-0003-0536-5415>

**Petrovych Volodymyr V.**, Candidate of Technical Sciences, Professor, Senior Researcher, Professor of the Transportation Construction and Property Management Department, National Transport University. e-mail: [petrovichvv60@ukr.net](mailto:petrovichvv60@ukr.net), tel. +380442807338, Ukraine, 01010, Kyiv, street M. Omelyanovicha-Pavlenka, 1, room 138, <https://orcid.org/0000-0003-0422-2535>

**Abstract.** At present in ecologies for mathematical models use the systems of chaotic maps. Presence deterministic (dynamic) chaos in such systems define with positions of the global largest Lyapunov exponent  $\lambda_1$ . The chaos is present when  $\lambda_1 > 0$  (when execution of some additional conditions).

When performing the studies for finding of the spectrum global and local Lyapunov exponent was used QR-method.

Using QR-method were organized studies of the large number of chaotic maps however in article as example are considered only two such maps. When undertaking the studies was found that als such chaotic maps possible to refer to two classes (the class I and class II).

Systems from class I have a positive largest global Lyapunov exponent. Herewith local largest Lyapunov exponents can take zero and negative values.

The systems from class II also have a positive global largest Lyapunov exponent.

However chaotic maps from class II have only positive values for local largist Lyapunov exponents. The study of the large number of the chaotic maps from class I and from class II has shown that majority maps from class II it is impossible adequately forecast with the help of the known presently methods of the forecasting (even on one point ahead). That is to say if ecological model is based on chaotic maps from class II that forecast in most cases not possible. For possibility of the adequate forecast it is necessary to use the ecological models built on base of the chaotic maps from class I.

The purpose of the undertaking the scientific studies.

The purpose of the studies consisted in creation to principal new categorization of the chaotic maps.

The purpose of the studies consisted in that to show that exists two classes of such chaotic maps (the class I and II), from which maps of the class II it is impossible forecast when use known an present time methods of the forecasting.

**Keywords:** deterministic chaos in ecology, local and global Lyapunov exponents, QR-method for determining the Lyapunov exponents spectrum, classification of the chaotic maps.

## References

1. Neymark Y.I., Landa P.S. *Stokhasticheskiye i khaoticheskiye kolebaniya*. M.: Nauka, 1987. – 424 s.
2. Henon M.A two – dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Phys.*50, – 1976, 69-77.

3. Geist K., Parlitz U., Lanteborn W. Comparison of different methods for Computing Lyapunov exponents. – Progress of theoretical physics, Vol.83, №5, May 1990, 875-893.
  4. Von Bremen H., Udadia F.E., Proskurowski W. An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents. Physica D, 101, 1997, 1-16.
  5. Ziehmann C., Smith L.A., Kurths J. The bootstrap and Lyapunov exponents in deterministic chaos. Physica D, 126, 1999, 49-59.
  6. Artemenko V.A., Petrovych V.V. Nova kontsepsiya khemometryky. – Avtomobil'ni dorohy i dorozhnye budivnytstvo, vyp. 113. –Kyiv, 2023. S.118-133.
  7. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. Physica 16 D, 1985, 285-317.
  8. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. Physica D, 16, 1993, 117-134.
- Artemenko V.A., Petrovych V.V. Pro prohnozovanist' hidrolohichnykh chasovykh ryadiv. – Avtomobil'ni dorohy i dorozhnye budivnytstvo, vyp. 111. –Kyiv, 2022. S.126-132.

*Дата надходження до редакції 05.09.2023.*