

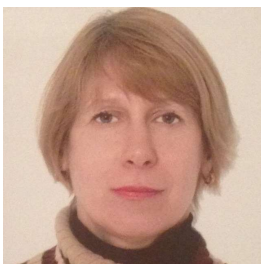
**ВРАХУВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ  
ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ПРОГИНІВ В БАЛКАХ ТОНКОСТІННОГО ПЕРЕРІЗУ**

**TRANSVERSE SHEAR DEFORMATIONS  
FOR DEFLECTIONS OF THIN-WALLED BEAMS**



*Льченко Ірина Олексіївна, кандидат технічних наук, доцент, доцент, кафедра опору матеріалів та машинознавства, Національний транспортний університет, [budivmeh@gmail.com](mailto:budivmeh@gmail.com), тел. +380442804368*

<https://orcid.org/0000-0002-9355-5632>



*Марченко Ніна Григоріївна, кандидат технічних наук, доцент, доцент, кафедра опору матеріалів та машинознавства, Національний транспортний університет, [nina.marchenkogr@gmail.com](mailto:nina.marchenkogr@gmail.com), тел. +380442804368*

<https://orcid.org/0000-0001-8212-811X>



*Гриневицький Борис Володимирович, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри опору матеріалів та машинознавства, Національний транспортний університет, [bvgryn@gmail.com](mailto:bvgryn@gmail.com), тел. +380442804368*

<https://orcid.org/0000-0002-2220-6654>

**Анотація.** При визначенні прогинів балок використовується класична теорія Ейлера-Бернуллі, яка враховує тільки деформації чистого згинання, а деформаціями поперечного зсуву нехтує. В роботі розглянуто шарнірно оперті балки та консолі з тонкостінними поперечними перерізами: двотавром та кільцем. Розглянуто два типи навантаження: рівномірно розподілене по довжині балки та консолі, а також зосереджена сила посередині шарнірно опертої балки та на краю консолі. Для зазначених випадків, а також для круглого та прямокутного поперечних перерізів, було виведено формули для коефіцієнта уточнення, який враховує деформацію поперечного зсуву. Для тонкостінних перерізів показано, при якій довжині балки відносно її висоти уточнений прогин перевищує класичний на 5%.

**Ключові слова:** балка Ейлера-Бернуллі, балка Тимошенка-Еренфеста, деформації поперечного зсуву, класичний прогин, уточнений прогин.

**Вступ.** Розрахунок будівельних конструкцій виконують з метою забезпечення необхідної міцності, жорсткості та стійкості при мінімальній затраті матеріалів, коштів і праці. Ще Галілео Галілей

на початку XVII ст. вивчав властивості різних металів і першим дослідив міцність балок. Протягом наступним століть методи розрахунку вдосконалювались і будівельники з доступною для їхнього часу точністю визначали зусилля в конструкціях і необхідні розміри перерізів.

Балка – один з найважливіших елементів будівельних споруд. Балки та теорія згинання балок зіграли велику роль в забезпеченні можливості технічного прогресу як такого. При проектуванні споруд часто виникає задача визначення прогинів балок, а сама величина прогинів може бути обмежена різноманітними факторами: технологічними, конструктивними, фізіологічними, естетико-психологічними тощо [4].

При визначенні прогинів в балках, в основному, використовується теорія Ейлера-Бернуллі або класична теорія, яка враховує тільки деформації чистого згинання. Згідно класичної теорії згинання балок при обчисленні прогинів не враховуються деформації поперечного зсуву, а довжина балки відносно її висоти приймається  $L \geq 5h$ . Проте саме врахування зсуву може уточнити класичний прогин при певних співвідношеннях довжини балки відносно її висоти.

**Метою дослідження** є отримання формули для коефіцієнта уточнення класичного прогину при врахуванні деформацій поперечного зсуву в простих однопрольотних балках та консолях з ізотропними поперечними перерізами.

**Об'єкт дослідження** – шарнірно обперті балки та консолі.

**Основна частина дослідження.** Найпростішим аналітичним варіантом обчислення прогину в плоских балках є використання формули Максвелла-Мора.

Згадана формула складається з двох частин: враховуються деформації чистого згинання та поперечного зсуву [3]:

$$\Delta_{mn} = \Delta_B^{(M+Q)} = \Delta_B^{(M)} + \Delta_B^{(Q)} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_m \cdot M_n}{EI} dx + \sum_{j=1}^n \int_0^l \mu \cdot \frac{\overline{Q}_m \cdot Q_n}{GF} dx, \quad (1)$$

де  $\Delta_B^{(M+Q)}$  – повний прогин в т. В (довільній точці) за напрямком фіктивної сили  $F_m$ , отриманий від дії дійсного навантаження, що враховує деформації чистого згинання та зсуву;  $\Delta_B^{(M)}$  – частина прогину, що враховує лише дію згинального моменту;  $\Delta_B^{(Q)}$  – частина прогину, що враховує лише дію поперечної сили;  $n$  – кількість ділянок балки;  $j$  – порядковий номер ділянки балки;  $l$  – довжина ділянки балки;  $M_n$  – згинальний момент, отриманий від дії дійсного навантаження на балку;  $\overline{M}_m$  – згинальний момент, отриманий від дії фіктивного навантаження на балку (одичина зосереджена сила  $F_m$ , прикладена в точці, де обчислюється прогин);  $EI$  – згинальна жорсткість ділянки балки;  $E$  – модуль пружності матеріалу,  $I$  – момент інерції поперечного перерізу,  $GF$  – зсувна жорсткість ділянки балки,  $G$  – модуль зсуву матеріалу,  $F$  – площа поперечного перерізу. Інтегрування відбувається вздовж осі балки (координатна вісь  $x$ ).

Для знаходження прогину, що враховує лише деформації чистого згинання, використовується скорочена формула Максвелла-Мора:

$$\Delta_B^{(M)} = \sum_{j=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_m \cdot M_n}{EI} dx, \quad (2)$$

Поправочний коефіцієнт в формулі (1)  $\mu$  згідно [8] визначається наступним чином:

$$\mu = \frac{F}{(I)^2} \int \frac{(S_y^*)^2}{(b(z))^2} dF, \quad (3)$$

Складові у цій формулі мають ті самі значення, що і при визначенні дотичних напружень в балці при плоскому поперечному згинанні.

Коефіцієнт  $\mu$  – безрозмірний коефіцієнт, що характеризує нерівномірність розподілу дотичних напружень по висоті поперечного перерізу балки. Величина  $\mu$  залежить лише від форми поперечного перерізу. Згідно [7] для деяких перерізів він становить:

**Таблиця 1** – Значення поправочного коефіцієнта  $\mu$  для деяких форм поперечного перерізу  
**Table 1** – The value of the correction coefficient  $\mu$  for some cross sections

Переріз	$\mu$	Переріз	$\mu$
Прямокутник	1,2	Двотавр	$\frac{F}{F_{ст}}$ ( $F$ – площа поперечного перерізу всього двотавра, $F_{ст}$ – площа стінки двотавра)
Трикутник рівнобедрений	1,2		
Круг	$32/27 \approx 1,18$		
Тонкостінне кільце	2,0		

Позначимо прогин, обчислений при врахуванні лише чистого згинання, як  $w_{кл}$ , а прогин, знайдений з врахуванням деформацій чистого згинання і поперечного зсуву, як  $w_{ут}$ .

Очевидно, що співвідношення між уточненим і класичним прогинами дорівнює деякому коефіцієнту  $k_{ут}$ :

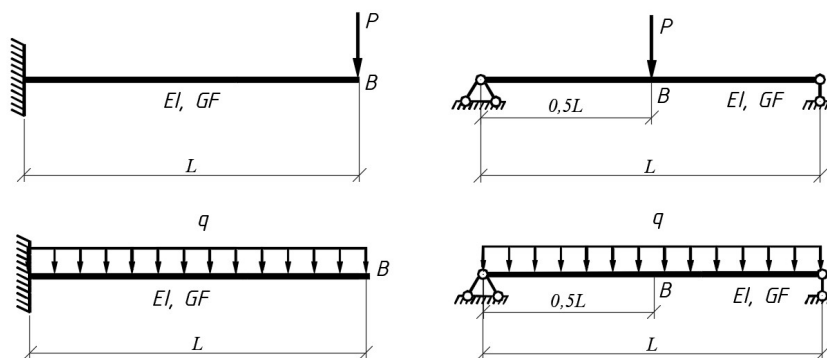
$$k_{ут} = \frac{\Delta_B^{(M+Q)}}{\Delta_B^{(M)}} = \frac{w_{ут}}{w_{кл}} \quad (4)$$

З формули (4) випливає, що на основі класичного прогину можна обчислювати уточнений:

$$w_{ут} = k_{ут} \cdot w_{кл} \quad (5)$$

Для застосування формули (5) необхідно отримати  $k_{ут}$  для балок з різними умовами закріплення і навантаження.

Розглянемо наступні розрахункові схеми балок: шарнірно опертую балку та консоль з двома видами навантаження на них: рівномірно розподіленим та зосередженою силою (рис. 1).



**Рисунок 1** – Розрахункові схеми балок

**Figure 1** – The beams calculation schemes

В роботі розглянуті два тонкостінні перерізи: двотавровий та кільце.

В таблицях 2-5 показані формули для коефіцієнта уточнення, що були отримані авторами на основі формул (1)-(5). Подано загальну формулу, а також формули для окремих випадків при різних поперечних перерізах.

Деякі формули для визначення  $w_{ут}$  можна зустріти в літературі. Наприклад, в [1] така формула подана для консолі вилітом  $L$  з двотавровим поперечним перерізом (навантаження: зосереджена сила на краю консолі). Зазначена формула збігається з відповідною формулою в таблиці 2.

**Таблиця 2** – Формули для коефіцієнта уточнення при визначенні максимального прогину консолі від дії зосередженої сили

**Table 2** – Formulas for the correction coefficient for determining the maximum deflection of the cantilever with a vertical concentrated force

		$w_{кл} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot EI}, \quad w_{ут} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot EI} + \mu \frac{P \cdot L}{GF}$	
Загальна формула			
$k_{ут} = 1 + \mu \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{GF \cdot L^2}$			
Матеріал – ізотропний			
Тонкостінні профілі металопрокату	$k_{ут} = 1 + \mu \cdot \frac{6 \cdot (1 + \nu)}{L^2} \cdot \frac{I}{F}$	Круг	$k_{ут} = 1 + \frac{64 \cdot (1 + \nu)}{9} \cdot \left(\frac{d}{L}\right)^2$
Прямокутник	$k_{ут} = 1 + \frac{3 \cdot (1 + \nu)}{5} \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2$	Тонкостінне кільце	$k_{ут} = 1 + \frac{3 \cdot (1 + \nu)}{4} \cdot \frac{D^2 + d^2}{L^2}$

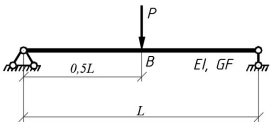
**Таблиця 3** – Формули для коефіцієнта уточнення при визначенні максимального прогину консолі під рівномірно розподіленим навантаженням

**Table 3** – Formulas for the correction coefficient for determining the maximum deflection of the cantilever with an uniformly distributed load

		$w_{кл} = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot EI}, \quad w_{ут} = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot EI} + \mu \frac{q \cdot L^2}{2 \cdot GF}$	
Загальна формула			
$k_{ут} = 1 + \mu \cdot \frac{4 \cdot EI}{GF \cdot L^2}$			
Матеріал – ізотропний			
Тонкостінні профілі металопрокату	$k_{ут} = 1 + \mu \cdot \frac{8 \cdot (1 + \nu)}{L^2} \cdot \frac{I}{F}$	Круг	$k_{ут} = 1 + \frac{256 \cdot (1 + \nu)}{27} \cdot \left(\frac{d}{L}\right)^2$
Прямокутник	$k_{ут} = 1 + \frac{4 \cdot (1 + \nu)}{5} \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2$	Тонкостінне кільце	$k_{ут} = 1 + (1 + \nu) \cdot \frac{D^2 + d^2}{L^2}$

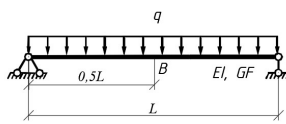
**Таблиця 4** – Формули для коефіцієнта уточнення при визначенні максимального прогину шарнірно опертій балки від дії зосередженої сили

**Table 4** – Formulas for the correction coefficient for determining the maximum deflection of the simply supported beam with a vertical concentrated force

		$w_{\text{ккл}} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot EI}, \quad w_{\text{ут}} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot EI} + \mu \frac{P \cdot L}{4GF}$	
Загальна формула			
$k_{\text{ут}} = 1 + \mu \cdot \frac{12 \cdot EI}{GF \cdot l^2}$			
Матеріал – ізотропний			
Тонкостінні профілі металопрокату	$k_{\text{ут}} = 1 + \mu \cdot \frac{24 \cdot (1 + \nu)}{L^2} \cdot \frac{I}{F}$	Круг	$k_{\text{ут}} = 1 + \frac{16 \cdot (1 + \nu)}{9} \cdot \left(\frac{d}{L}\right)^2$
Прямокутник	$k_{\text{ут}} = 1 + \frac{12 \cdot (1 + \nu)}{5} \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2$	Тонкостінне кільце	$k_{\text{ут}} = 1 + 3 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{D^2 + d^2}{L^2}$

**Таблиця 5** – Формули для коефіцієнта уточнення при визначенні максимального прогину шарнірно опертій балки під рівномірно розподіленим навантаженням

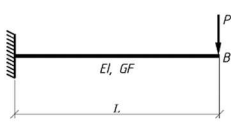
**Table 5** – Formulas for the correction coefficient for determining the maximum deflection of the simply supported beam with an uniformly distributed load

		$w_{\text{ккл}} = \frac{5q \cdot L^4}{384 \cdot EI}, \quad w_{\text{ут}} = \frac{5q \cdot L^4}{384 \cdot EI} + \mu \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot GF}$	
Загальна формула			
$k_{\text{ут}} = 1 + \mu \cdot \frac{48 \cdot EI}{5 \cdot GF \cdot L^2}$			
Матеріал – ізотропний			
Тонкостінні профілі металопрокату	$k_{\text{ут}} = 1 + \mu \cdot \frac{96 \cdot (1 + \nu)}{5L^2} \cdot \frac{I}{F}$	Круг	$k_{\text{ут}} = 1 + \frac{64 \cdot (1 + \nu)}{45} \cdot \left(\frac{d}{L}\right)^2$
Прямокутник	$k_{\text{ут}} = 1 + \frac{48 \cdot (1 + \nu)}{25} \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2$	Тонкостінне кільце	$k_{\text{ут}} = 1 + \frac{12 \cdot (1 + \nu)}{5} \cdot \frac{D^2 + d^2}{L^2}$

Аналіз таблиць 2-5 показує, що для ізотропних матеріалів коефіцієнт уточнення  $k_{ут}$  залежить від наступних чинників: умов закріплення балки, типу навантаження, поправочного коефіцієнта (тобто, від форми поперечного перерізу), коефіцієнта Пуассона, моменту інерції та площі поперечного перерізу.

**Таблиця 6** – Порівняння прогинів сталеві консолі від дії зосередженої сили

**Table 6** – Comparison of deflections of the steel cantilever with a concentrated vertical force

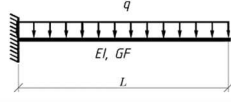


$E = 2,0601 \cdot 10^5$  МПа,  $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ ,  $\frac{G}{E} = \frac{1}{2,6}$ ,  $\nu = 0,3$   
 $P = 10$ кН,  $\Delta$  - різниця в значеннях уточнених прогинів

$l$ – довжина балки	Значення прогинів, обчислених за МСЕ з використанням SCAD++, мм		Значення прогинів, обчислених за формулами таблиць 2-5, мм			$k_{ут}$
	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$\Delta, \%$	
Двотавр № 20 [5]						
$L = 15h$	23,743043	24,133189	23,743043	24,140489	0	1,02
$L = 10h$	7,034976	7,295073	7,034976	7,299939	0,1	1,04
$L = 5h$	0,879372	1,009420	0,879372	1,011854	0,2	1,15
Тонкостінне кільце 219x2,5 (зовнішній діаметр $D=21,9$ см, товщина $t=0,25$ см) [6]						
$L = 15D$	57,565928	58,053531	57,565869	58,053512	0	1,01
$L = 10D$	17,056571	17,381638	17,056554	17,381650	0	1,02
$L = 5D$	2,132071	2,294605	2,132069	2,294617	0	1,08

**Таблиця 7** – Порівняння прогинів сталеві консолі під рівномірно розподіленим навантаженням

**Table 7** – Comparison of deflections of the steel cantilever with an uniformly distributed load



$E = 2,0601 \cdot 10^5$  МПа,  $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ ,  $\frac{G}{E} = \frac{1}{2,6}$ ,  $\nu = 0,3$   
 $q = 10$ кН/м,  $\Delta$  - різниця в значеннях уточнених прогинів

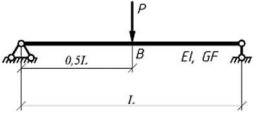
$l$ – довжина балки	Значення прогинів, обчислених за МСЕ з використанням SCAD++, мм		Значення прогинів, обчислених за формулами таблиць 2-5, мм			$k_{ут}$
	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$\Delta, \%$	
Двотавр № 20 [5]						
$L = 15h$	26,710922	27,296141	26,710924	27,307092	0	1,02
$L = 10h$	5,276232	5,536329	5,276232	5,541195	0,1	1,05
$L = 5h$	0,329764	0,394789	0,329764	0,396005	0,3	1,20
Тонкостінне кільце 219x2,5 (зовнішній діаметр $D=21,9$ см, товщина $t=0,25$ см) [6]						
$L = 15D$	70,914030	71,714915	70,913955	71,714909	0	1,01
$L = 10D$	14,007710	14,363658	14,007695	14,363675	0	1,03
$L = 5D$	0,875482	0,964469	0,875481	0,964476	0	1,10

В таблицях 6-9 подані значення максимальних прогинів (уточненого та класичного) для балок з різними умовами закріплення та навантаження, а також з різними поперечними перерізами, виконаних з ізотропних матеріалів (наприклад, сталь). Максимальні прогини, обчислені за формулами таблиць 2-5, було порівняно з прогинами, знайденими за методом скінченних елементів з

використанням SCAD++ [2]. В якості скінченного елемента використовувалися наступні: стрижень без врахування деформацій поперечного зсуву (стрижень Ейлера-Бернуллі) та стрижень з врахуванням деформацій поперечного зсуву (стрижень Тимошенка-Еренфеста). Збіжність результатів для зазначених балок є кращою, ніж для шаруватих систем [9].

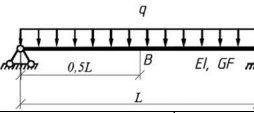
**Таблиця 8 – Порівняння прогинів сталеві шарнірно опертої балки від дії зосередженої сили**  
**Table 8 – Comparison of deflections of the steel simply supported beam with a concentrated vertical**

force

		$E = 2,0601 \cdot 10^5 \text{ МПа}, G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}, \frac{G}{E} = \frac{1}{2,6}, \nu = 0,3$ $P=10\text{кН}, \Delta - \text{різниця в значеннях уточнених прогинів}$				
$l$ – довжина балки	Значення прогинів, обчислених за МСЕ з використанням SCAD++, мм		Значення прогинів, обчислених за формулами таблиць 2-5, мм			$k_{ут}$
	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$\Delta, \%$	
Двутавр сталевий № 20 [5]						
$L = 15h$	1,483940	1,581477	1,483940	1,583302	0,1	1,07
$L = 10h$	0,439686	0,504710	0,439686	0,505927	0,2	1,15
$L = 5h$	0,054961	0,0874729	0,0549607	0,0880812	0,7	1,60
Тонкостінне кільце 219x2,5 (зовнішній діаметр $D=21,9$ см, товщина $t=0,25$ см) [6]						
$L = 15D$	3,597870	3,719771	3,597867	3,719778	0	1,03
$L = 10D$	1,066036	1,147303	1,066035	1,147309	0	1,08
$L = 5D$	0,133254	0,173888	0,133254	0,173891	0	1,30

**Таблиця 9 – Порівняння прогинів сталеві шарнірно опертої балки під рівномірною розподіленою навантаженням**

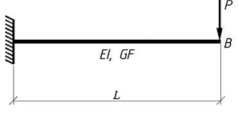
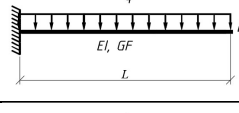
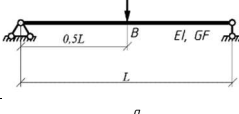
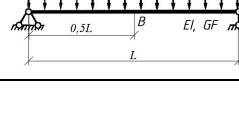
**Table 9 – Comparison of deflections of the steel simply supported beam with an uniformly distributed load**

		$E = 2,0601 \cdot 10^5 \text{ МПа}, G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}, \frac{G}{E} = \frac{1}{2,6}, \nu = 0,3$ $q=10\text{кН/м}, \Delta - \text{різниця в значеннях уточнених прогинів}$				
$l$ – довжина балки	Значення прогинів, обчислених за МСЕ з використанням SCAD++, мм		Значення прогинів, обчислених за формулами таблиць 2-5, мм			$k_{ут}$
	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$w_{кл}$	$w_{ут}$	$\Delta, \%$	
Двутавр сталевий № 20 [5]						
$L = 15h$	2,782388	2,928692	2,782388	2,931430	0,1	1,05
$L = 10h$	0,549607	0,614632	0,549607	0,615848	0,2	1,12
$L = 5h$	0,0343505	0,0506065	0,0343505	0,0509107	0,6	1,48
Тонкостінне кільце 219x2,5 (зовнішній діаметр $D=21,9$ см, товщина $t=0,25$ см) [6]						
$L = 15D$	7,386878	7,587099	7,386870	7,587109	0	1,03
$L = 10D$	1,459136	1,548123	1,459135	1,548130	0	1,06
$L = 5D$	0,0911960	0,113443	0,0911959	0,113445	0	1,24

Коефіцієнт уточнення класичного прогину  $k_{ут}$  в таблицях 6-9 відповідає балці, виконаної з будь-якого ізотропного матеріалу (сталь, алюміній).

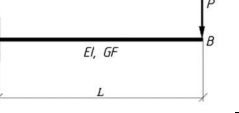
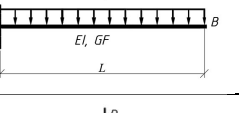
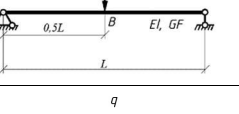
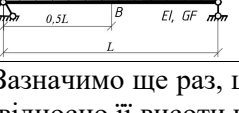
**Таблиця 10** – Значення довжини балки  $L$  відносно висоти її поперечного перерізу  $h$  (сталевий двотавр [5]), при якому  $k_{\text{ут}}$  збільшує класичний прогин на 5% і більше

**Table 10** – The length  $L$  of the beam relative to the height (steel I-beam [5]), at which  $k_{\text{ут}}$  increases the classical deflection by more than 5%

Схема балки	Значення довжини балки $L$ відносно висоти її поперечного перерізу $h$ , при якому $k_{\text{ут}}$ збільшує класичний прогин на 5% і більше					
	10	20	30	40	50	60
	$\leq 9h$	$\leq 8,7h$	$\leq 8,2h$	$\leq 7,7h$	$\leq 7,3h$	$\leq 7h$
	$\leq 10,3h$	$\leq 10h$	$\leq 9,5h$	$\leq 8,9h$	$\leq 8,4h$	$\leq 8,1h$
	$\leq 17,9h$	$\leq 17,4h$	$\leq 16,4h$	$\leq 15,5h$	$\leq 14,5h$	$\leq 14h$
	$\leq 16h$	$\leq 15,5h$	$\leq 14,7h$	$\leq 13,8h$	$\leq 13h$	$\leq 12,5h$

**Таблиця 11** – Значення довжини балки  $L$  відносно зовнішнього діаметру  $D$  (сталеве тонкостінне кільце згідно [6]), при якому  $k_{\text{ут}}$  збільшує класичний прогин на 5% і більше

**Table 11** – The length  $L$  of the beam relative to the diameter (steel thin circular ring [6]), at which  $k_{\text{ут}}$  increases the classical deflection by more than 5%

Схема балки	Значення довжини балки $L$ відносно зовнішнього діаметру $D$ , при якому $k_{\text{ут}}$ збільшує класичний прогин на 5% і більше			
	30x1	219x2,5	630x7	1420x20
	$\leq 6D$	$\leq 6,2D$	$\leq 6,2D$	$\leq 6,1D$
	$\leq 7D$	$\leq 7,2D$	$\leq 7,2D$	$\leq 7,1D$
	$\leq 12,1D$	$\leq 12,4D$	$\leq 12,3D$	$\leq 12,3D$
	$\leq 10,8D$	$\leq 11,1D$	$\leq 11D$	$\leq 11D$

Зазначимо ще раз, що згідно класичної теорії згинання балок при обчисленні прогинів довжина балки відносно її висоти приймається  $L \geq 5h$ , проте з попередніх розрахунків видно, що це значення залежить від умов закріплення балки, навантаження та жорсткості балок. В таблицях 10-11 подані



значення довжини балки відносно висоти її поперечного перерізу, при якому уточнений прогин перебільшує класичний прогин на 5%.

Для тих розмірів двотаврів, що не увійшли в таблицю 10, відносну довжину балки можна обчислити за допомогою відповідних формул для  $k_{yt}$ , поданих у таблицях 2-5. Для розмірів тонкостінних кілець, що не увійшли в таблицю 11, відносну довжину балки можна обчислити за допомогою відповідних формул для  $k_{yt}$ , поданих в таблицях (2)-(5).

Аналіз таблиць 2-11 показує:

- шарнірно оберта балка є більш жорсткою в порівнянні з консоллю (при одному й тому самому навантаженні та поперечному перерізі), але більш піддатливою деформаціям поперечного зсуву;
- вплив деформацій поперечного зсуву зростає при зменшенні відношення довжини балки до висоти її поперечного перерізу;
- вплив зсуву є більшим при дії на розрахункову схему шарнірно обертої балки зосередженої сили в порівнянні з дією рівномірно розподіленого навантаження, а для консолі вплив зсуву є більшим при дії на розрахункову схему рівномірно розподіленого навантаження в порівнянні з дією зосередженої сили;
- між значеннями прогинів, обчисленими за MCE (SCAD++), та прогинами, обчисленими за аналітичними формулами, існує достатня збіжність (двотавр № 20 та кільце 219x2,5);
- порівняння результатів розрахунків для поперечних перерізів, виконаних з двотавра та тонкостінного кільця з товщиною, співрозмірній товщині стінки двотавра, показує, що тонкостінне кільце є менш жорстким перерізом, але двотавр є більш піддатливим деформаціям зсуву;
- обчислення коефіцієнту уточнення класичного прогину вказує на те, що враховувати деформації поперечного зсуву необхідно навіть для достатньо тонких балок.

### Висновки

1. В роботі проаналізовано серію балок з різними умовами закріплення, навантаження та з різними тонкостінними поперечними перерізами. Для таких балок знайдено класичні та уточнені максимальні прогини. Виконано перевірку значень прогинів з відповідними прогинами, розрахованими за методом скінченних елементів з використанням обчислювального комплексу SCAD++.

2. Отримано формули для коефіцієнта уточнення класичного прогину  $k_{yt}$ , який дозволяє отримувати максимальні прогини з врахуванням деформацій поперечного зсуву для шарнірно обертих балок та консолей при різних видах навантаження та різних поперечних перерізах.

3. Для двотаврового поперечного перерізу (ДСТУ 8768:2018) та тонкостінного кільця (ДСТУ 8943:2019) виявлено співвідношення довжини балки до її висоти, при яких уточнений прогин перевищує класичний на 5%.

4. Показано, що враховувати деформації поперечного зсуву при визначенні максимального прогину необхідно навіть для достатньо тонких балок.

### Перелік посилань

1. Чихладзе Е.Д. Будівельна механіка: Підручник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. С. 121-123.
2. SCAD Office. Версія 21. Вычислительный комплекс SCAD++. В.С.Карпиловский, Э.З.Криксунов, А.А.Малышенко, С.Ю.Фиалко, А.В.Перельмутер, М.А.Перельмутер, 2015.
3. Karnovsky, I.A., Lebed, O. Advanced methods of structural analysis. Springer Nature. 2010. P. 160.
4. ДСТУ Б В.1.2-3:2006 Прогини і переміщення. Вимоги проектування (укр).
5. ДСТУ 8768:2018 Двотаври сталеві гарячекатані. Сортамент – УЧСБ.
6. ДСТУ 8943:2019 Труби сталеві електрозварювальні. Технічні умови.
7. Любошиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов. Изд. 2-е, "Вышэйш. школа", 1969. С. 224.

8. В.С. Карпиловський, Е.З. Криксунов, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. Формування перерізів та їх геометричних характеристик (Structure CAD: Інтегрована система аналізу конструкцій). – К.: ВВП «Компас», 2000. С. 62.

9. Визначення прогинів в плитах типу сандвіч аналітичним та числовим методами. Implementation Of The Innovative Materials And Technologies In The Field Of Design, Construction, And Exploitation Of The Objects Of Transport Infrastructure During Great Construction Program 2022-11-25. DOI:<https://doi.org/10.33744/978-966-632-317-3-2023-2>

### **TRANSVERSE SHEAR DEFORMATIONS FOR DEFLECTIONS OF THIN-WALLED BEAMS**

**Ichenko Iryna**, PhD (Candidate of Technical Science), Associate Professor, National Transport University, Associate Professor of Department of Strength of Materials and Mechanical Engineering, e-mail: [budivmeh@gmail.com](mailto:budivmeh@gmail.com), tel. +380442804368, Ukraine, 01010, Kyiv, Omelianovych-Pavlenko str. 1, of. 113, <https://orcid.org/0000-0002-9355-5632>

**Marchenko Nina**, PhD (Candidate of Technical Science), Associate Professor, National Transport University, Associate Professor of Department of Strength of Materials and Mechanical Engineering, e-mail: [nina.marchenkogr@gmail.com](mailto:nina.marchenkogr@gmail.com), tel. +380442804368, Ukraine, 01010, Kyiv, Omelianovych-Pavlenko str. 1, of. 113, <https://orcid.org/0000-0001-8212-811X>

**Grinevitzkiy Boris**, PhD (Candidate of Technical Science), Associate Professor, National Transport University, Associate Professor of Department of Strength of Materials and Mechanical Engineering, e-mail: [bvgryn@gmail.com](mailto:bvgryn@gmail.com), +380442804368, Ukraine, 01010, Kyiv, Omelianovych-Pavlenko str. 1, of. 113 <https://orcid.org/0000-0002-2220-6654>

**Summary.** The Euler-Bernoulli theory (classical theory) is mainly used when beam deflections are determined. Classical theory takes into account only pure bending while transverse shear deformations are neglected. The paper examines statically determined thin-walled beams (I-beam and thin circular ring): simply supported beams and cantilevers. The load is uniformly distributed along the length of the beam and cantilever and a concentrated force applied at the center of the simply supported beam and at the edge of the cantilever. For the specified cases, as well as for round and rectangular beams, formulas for the correction coefficient were derived. The coefficient takes into account the deformation of the transverse shear. It is shown at what relative length of the thin-walled beams, the specified deflection exceeds the classical one by more than 5%.

**Keywords:** Euler-Bernoulli beam, Timoshenko-Ehrenfest beam, shear deformation, classical deflection, specified deflection.

### **References**

1. Chikhladze E.D. Structural mechanics: Textbook. - Kharkiv: UkrDAZT, 2011. P. 121-123.
2. SCAD Office. Version 21. SCAD++ computer complex. V.S. Karpilovsky, E.Z. Kryksunov, A.A. Malyarenko, S.Yu. Fialko, A.V. Perelmuter, M.A. Perelmuter, 2015.
3. Karnovsky, I.A., Lebed, O. Advanced methods of structural analysis. Springer Nature. 2010. P. 160.
4. DSTU B V.1.2-3:2006. Deflections and displacement. Design requirements (Ukrainian).
5. DSTU 8768:2018. Hot-rolled steel I-beams. Assortment.
6. DSTU 8943:2019. Electric welding steel pipes. Specifications.
7. Lyuboshits M.I., Itskovich H.M. Handbook of resistance of materials. Ed. 2nd, "Vysheishaja shkola", 1969. P. 224.
8. V.S. Karpilovskyi, E.Z. Kryksunov, A.V. Perelmuter, M.A. Perelmuter. Modelling of cross sections and calculations of their geometric characteristics (Structure CAD: Integrated system of structural analysis). - К.: VVP "Kompas", 2000. С. 62.
9. Determining deflections in sandwich-type slabs by analytical and numerical methods. Implementation Of The Innovative Materials And Technologies In The Field Of Design, Construction, And Exploitation Of The Objects Of Transport Infrastructure During Great Construction Program 2022-11-25 | Theses DOI:<https://doi.org/10.33744/978-966-632-317-3-2023-2>

*Дата надходження до редакції 15.10.2023.*