

Кузло М.Т., канд. техн. наук

ОЦІНКА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГРУНТОВИХ МАСИВІВ ПРИ ЗМІННИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ І ДЕФОРМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГРУНТУ

Анотація. Отримані розв'язки напружено-деформованого стану ґрунтових масивів для випадку, коли фільтраційні і деформаційні характеристики ґрунту залежать від концентрації сольових розчинів.

Ключові слова: напруження, деформації, фільтрація, сольові розчини.

Аннотация. Получены решения напряженно-деформованого состояния ґрунтовых массивов для случая, когда фильтрационные и деформационные характеристики ґрунта зависят от концентрации сольовых растворов.

Annotation. The solutions of soil massifs' strained-deformed state for the case when filtrational and deformational characteristics of soil depend on salt solutions' concentrations are received.

При експлуатації промислових і цивільних будівель та споруд, їх ґрунтові основи можуть забруднюватися різноманітними техногенними джерелами, зокрема розчинами солей.

Аналіз останніх досліджень показав, що до теперішнього часу кількісна оцінка напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтових масивів для випадку, коли фільтраційні і деформаційні характеристики ґрунту залежать від концентрації сольових розчинів дана дуже слабо [1].

У зв'язку з цим виникла необхідність в оцінки НДС ґрунтових масивів для випадку, коли фільтраційні і деформаційні характеристики ґрунту залежать від концентрації сольових розчинів.

Метою роботи є визначення НДС (переміщень, деформацій, напружень) при змінних фільтраційних і деформаційних характеристиках ґрунту.

В даній роботі пропуюються розв'язки НДС ґрунтового масиву для одновимірного випадку при умові, що коефіцієнт фільтрації та коефіцієнти

Ламе залежать від концентрації розчинених солей в ґрунті $c(x)$, тобто $k(c(x)), \lambda_1(c(x)), \mu_1(c(x))$ (рис.1).

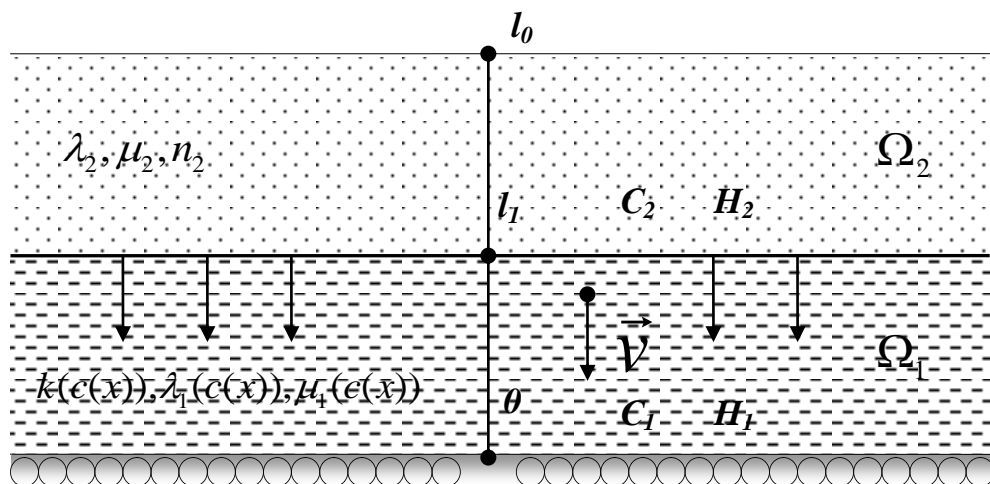


Рис. .1 Схема ґрунтового масиву з оцінки НДС при змінних фільтраційних і деформаційних характеристиках ґрунту

Нехай на нижній поверхні ґрунту на межі $x=0$ задано п'єзометричний напір H_1 та концентрація розчинених у воді солей C_1 , а на глибині l_1 , відповідно H_2 та C_2 ($H_2 > H_1$, $C_2 > C_1$).

Запишемо рівняння НДС в переміщеннях:

$$(\lambda_1(c(x)) + 2\mu_1(c(x))) \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d(\lambda_1(c(x)) + 2\mu_1(c(x)))}{dx} \cdot \frac{du_1}{dx} = X_1, \quad x \in (0, l_1), \quad (1)$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{d^2 u_2}{dx^2} = X_2, \quad x \in (l_1, l), \quad (2)$$

де u_i , $i=1,2$ – переміщення вздовж осі ОХ в ґрунтах, що знаходяться відповідно в зваженому ($x \in (0, l_1)$) та в природному ($x \in (l_1, l)$) стані;

$\lambda_1(c(x)), \mu_1(c(x)), \lambda_2, \mu_2$ – коефіцієнти Ламе (пружні сталі);

$$X_1 = \gamma_{sg} + \frac{dp}{dx}, \quad X_2 = \gamma_{np}, \quad (3)$$

де γ_{sb} – грунт, що знаходиться в зваженому стані; γ_{np} – питома вага ґрунту в природному стані; $\frac{dp}{dx}$ – зміна тиску відносно вертикальної осі ОХ.

Тиск від фільтраційного потоку визначається за формулою

$$p = \gamma_w (h - x), \quad (4)$$

де γ_w – питома вага фільтруючої рідини; h – п'єзометричний напір; x – вертикальна координата.

Крайові умови для переміщень мають вигляд

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(l_0) = 0. \quad (5)$$

Це означає, що переміщення на краях шару ґрунту відсутні.

Запишемо умови спряження на межі вільної поверхні в ґрунтовому масиві:

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \quad (6)$$

$$(\lambda_1(c(l_1)) + 2\mu_1(c(l_1))) \frac{du_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{du_2(l_1)}{dx}. \quad (7)$$

Так, як нами розглядається задача, що ґрунтовий масив насичений сольовими розчинами запишемо рівняння конвективної дифузії розчинених речовин:

$$D \frac{d^2 c}{dx^2} - V \frac{dc}{dx} - \gamma(c - C_*) = 0. \quad (8)$$

Крайові умови для концентрації мають вигляд

$$L_1 c = \left(\alpha_1 c + \beta_1 \frac{dc}{dx} \right) \Big|_{x=0} = C_1,$$

$$L_2 c = \left(\alpha_2 c + \beta_2 \frac{dc}{dx} \right) \Big|_{x=l_1} = C_2. \quad (9)$$

Фільтрація сольових розчинів у ґрунтовому масиві відбувається згідно модефікованого закону А. Дарсі [1]:

$$V = -k(c(x)) \frac{dh}{dx}, \quad \frac{dV}{dx} = 0, \quad (10)$$

$$h(0) = H_1, \quad h(l_1) = H_2. \quad (11)$$

Перейдемо у (1)-(11) до безрозмірних вличин згідно формул

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l}, \quad \bar{p} = \frac{p}{l}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l}, \quad \bar{c} = \frac{c}{C_*}, \quad \bar{k} = \frac{k}{\tilde{k}}, \quad \bar{D} = \frac{D}{l\tilde{k}} \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{l}, \quad i = 1, 2,$$

де $\tilde{k} = k|_{c=0}$ – коефіцієнт фільтрації чистої води в даному ґрунтовому середовищі. Для спрощення рисочки над безрозмірними змінними опустимо.

Знайдемо розв’язок задачі фільтрації сольових розчинів (10)-(11). Використовуючи формули (10), маємо

$$\frac{d\left(k(c(x))\frac{dh}{dx}\right)}{dx} = 0, \quad \text{звідси} \quad h(x) = A \int_0^x \frac{ds}{k(c(s))} + B.$$

Визначимо значення невідомих коефіцієнтів A, B :

$$B = H_1, \quad A = \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(c(s))}}. \quad (12)$$

Тоді значення п’езометричного напіру буде визначатися за формулою:

$$h(x) = \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(c(s))}} \int_0^x \frac{ds}{k(c(s))} + H_1. \quad (13)$$

Знайшовши п’езометричний напір, можна визначити швидкість фільтрації за допомогою формул (10):

$$V = -A, \quad V = \frac{H_1 - H_2}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(c(s))}}. \quad (14)$$

Визначимо зміну тиску $\frac{dp}{dx}$ використовуючи формулу (4):

$$\frac{dp}{dx} = \gamma_w \left(\frac{1}{k(c(x))} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(c(s))}} - 1 \right).$$

Таким чином, складова об'ємних сил буде визначатися за формулою

$$X_1 = \gamma_{sb} + \gamma_w \left(\frac{1}{k(c(x))} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(c(s))}} - 1 \right). \quad (15)$$

Знайдемо розв'язок задачі масопереносу (8), (9) при $\gamma = 0$:

$$\frac{d^2 c}{dx^2} - \frac{V}{D} \frac{dc}{dx} = 0. \quad (16)$$

Загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$c(x) = b_1 e^{\lambda_1 x} + b_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (17)$$

де $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{V}{D}$ – корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + \frac{V}{D} \lambda = 0$.

Підставивши їх значення в (17), отримаємо

$$c(x) = b_1 + b_2 e^{\frac{V}{D} x}. \quad (18)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів b_1, b_2 використовуємо крайові умови (9). У випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ та $\beta_1 = \beta_2 = 0$, отримаємо розв'язок

$$c(x) = \frac{C_2 (1 - e^{\frac{V}{D} x}) + C_1 (e^{\frac{V}{D} x} - e^{\frac{V}{D} l_1})}{1 - e^{\frac{V}{D} l_1}}. \quad (19)$$

Введемо деяке позначення, враховуючи, що $\bar{A}_1 = A_1 \cdot l$, $\bar{a}_i = a_i \cdot l$, $i = 1, 2$ (надалі риси над позначенням для простоти опущені):

$$q(x) = \lambda_1(c(x)) + 2\mu_1(c(x)), \quad (20)$$

$$P(x) = \frac{1}{q(x)} \cdot \frac{dq(x)}{dx}, \quad (21)$$

$$f(x) = \frac{1}{q(x)} \left(a_1 + \frac{A_1}{k(c(x))} \right), \quad (22)$$

$$\text{де } a_1 = \gamma_{sv} - \gamma_w, \quad A_1 = \frac{\gamma_w(H_2 - H_1)}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(c(s))}}, \quad a_2 = \frac{\gamma_{np.}}{\lambda_2 + 2\mu_2}.$$

У безрозмірних змінних математична модель НДС шару ґрунту запишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + P(x) \frac{du_1}{dx} = f(x), \quad x \in (0, l_1), \quad (23)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = a_2, \quad x \in (l_1, l). \quad (24)$$

Розглянемо випадок, коли верхня межа ґрунту може переміщуватися, тобто крайові умови для переміщень мають вигляд

$$u_1(0) = 0, \quad \frac{du_2(l)}{dx} = 0. \quad (25)$$

Умови спряження:

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \quad q(l_1) \frac{du_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{du_2(l_1)}{dx}. \quad (26)$$

Перейдемо до безрозмірних величин користуючи формулами:

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{l_0}, \quad \bar{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_0}, \quad \bar{A}_1 = A_1 \cdot l_0, \quad \bar{a}_i = a_i \cdot l_0, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{l_0}, \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{c} = \frac{c}{C_*}, \quad \bar{k} = \frac{k}{\tilde{k}}, \quad \bar{D} = \frac{D}{l_0 \tilde{k}}.$$

Враховуємо, що $l(t) \leq l_0$, $l(t) - l_0 = u_2(l(t))$, $l(0) = l_0$.

В даному випадку розв'язок задачі задається формулами

$$u_1(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{q(z)} \int_0^z f(s)q(s)ds \right) dz + c_1 q(0) \int_0^x \frac{1}{q(z)} dz + c_2, \quad x \in (0, l_1), \quad (27)$$

$$u_2(x) = \frac{a_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4, \quad x \in (l_1, l), \quad (28)$$

$$\text{де} \quad c_2 = 0; \quad (29)$$

$$c_3 = -a_2 l; \quad (30)$$

$$c_1 = \frac{1}{q(0)} \left((\lambda_2 + 2\mu_2)(a_2 l_1 - a_2 l) - \int_0^{l_1} f(z)q(z)dz \right); \quad (31)$$

$$c_4 = -\frac{a_2 l_1^2}{2} + a_2 l l_1 + \int_0^{l_1} \left(\frac{1}{q(z)} \int_0^z f(s)q(s)ds \right) dz + \int_0^{l_1} \frac{1}{q(z)} dz \left((\lambda_2 + 2\mu_2)(a_2 l_1 - a_2 l) - \int_0^{l_1} f(z)q(z)dz \right). \quad (32)$$

Величина деформації обчислюється за формулами

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{q(x)} \int_0^x f(z)q(z)dz + c_1 \frac{q(0)}{q(x)}, \quad 0 \leq x \leq l_1; \quad (33)$$

$$\varepsilon_2(x) = a_2 x + c_3, \quad l_1 \leq x \leq l. \quad (34)$$

Напруження матимуть вигляд

$$\sigma_1(x) = \int_0^x f(z)q(z)dz + c_1 q(0), \quad 0 \leq x \leq l_1; \quad (35)$$

$$\sigma_2(x) = (\lambda_2 + 2\mu_2)(a_2 x + c_3), \quad l_1 \leq x \leq l. \quad (36)$$

Таким чином, задача НДС ґрунтових масивів для випадку, коли фільтраційні і деформаційні характеристики ґрунту залежать від концентрації сольових розчинів описується формулами (27)-(36).

Осідання поверхні ґрунту визначається за формулами

$$l(t) - l_0 = u_2(l(t)). \quad (37)$$

Використовуючи формулу (28), маємо

$$u_2(l(t)) = \frac{a_2 l^2(t)}{2} + c_3 l(t) + c_4, \quad (38)$$

де c_3, c_4 – коефіцієнти, що визначаються за формулами (30), (32).

Підставивши значення (30) і (32) у формули (37,38), отримаємо

$$\frac{a_2}{2} l^2(t) + b_1 \cdot l(t) + b_2 = 0, \quad (39)$$

$$\text{де } b_1 = (\lambda_2 + 2\mu_2)a_2 \int_0^{l_1} \frac{dz}{q(z)} - a_2 l_1 + 1, \quad (40)$$

$$b_2 = \frac{a_2 l_1^2}{2} - \int_0^{l_1} \left(\frac{1}{q(z)} \int_0^z f(s)q(s)ds \right) dz - \int_0^{l_1} \frac{1}{q(z)} dz \left((\lambda_2 + 2\mu_2)a_2 l_1 - \int_0^{l_1} f(z)q(z)dz \right) - l_0. \quad (41)$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (39) відносно змінної $l(t)$, маємо

$$l(t) = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 2a_2 b_2}}{a_2}, \quad (42)$$

де b_1 і b_2 визначаються за формулами (40), (41).

Нижче наведені результати числових розрахунків при наступних вхідних даних:

$$\lambda_2 = 17000 \text{ кг/м}^2; \mu_2 = 11500 \text{ кг/м}^2; \gamma_{se} = 10,5 \text{ кН/м}^3; \gamma_{np} = 17,0 \text{ кН/м}^3; \\ \gamma_w = 10,0 \text{ кН/м}^3; H_1 = 0 \text{ м}; H_2 = 0,5 \text{ м}; C_1 = 0 \text{ г/л}; C_2 = 350 \text{ г/л}; D = 0,002 \\ \text{м}^2 / \text{доба}; l_1 = 0,5 \text{ м}; l_0 = 1 \text{ м}.$$

За формулою (42) знаходимо значення $l \approx 0,99 \text{ м}$.

Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину записується у вигляді [2]:

$$k(c) = a_5 \cdot c^5 + a_4 \cdot c^4 + a_3 \cdot c^3 + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0,$$

де $a_5 = 5,9404 \cdot 10^{-2}$; $a_4 = -1,6703 \cdot 10^{-1}$; $a_3 = 1,7051 \cdot 10^{-1}$; $a_2 = -7,4311 \cdot 10^{-2}$;
 $a_1 = 1,0563 \cdot 10^{-2}$; $a_0 = 1,0054 \cdot 10^{-3}$;

$c \in [0,1]$ – безрозмірна величина.

Запишемо залежності коефіцієнтів Ламе від концентрації сольового розчину [3].

$$\mu_1(c) = a_3'' \cdot c^3 + a_2'' \cdot c^2 + a_1'' \cdot c + a_0'',$$

де $a_3'' = -1205,2846$; $a_2'' = 2880,3214$; $a_1'' = -1741,9191$; $a_0'' = 1696,3239$.

$$\lambda_1(c) = a_3''' \cdot c^3 + a_2''' \cdot c^2 + a_1''' \cdot c + a_0''',$$

де $a_3''' = -1798,9582$; $a_2''' = 4314,7316$; $a_1''' = -2615,3737$; $a_0''' = 2545,7428$.

$c \in [0,1]$ – безрозмірна величина)

Результати розрахунків наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення переміщень, деформацій та напружень.

	x	$u(x), \times 10^{-4}$	$\varepsilon(x), \times 10^{-3}$	$\sigma(x)$
Ґрунт в природному стані	1	-8,69113	0,00037	0,01477
	0,9	-8,67025	-0,04213	-1,68523
	0,8	-8,60687	-0,08463	-3,38523
	0,7	-8,50099	-0,12713	-5,08523
	0,6	-8,35261	-0,16963	-6,78523
	0,5	-8,16173	-0,21213	-8,48523
Ґрунт в зваженому стані	0,5	-8,16173	-1,48732	-8,48523
	0,4	-8,28152	-1,98113	-10,60596
	0,3	-7,00350	-2,38529	-11,92272
	0,2	-4,91598	-2,64366	-12,79873
	0,1	-2,43410	-2,62233	-13,33688
	0	0	-2,31295	-13,73523

Графіки розподілу переміщень, деформацій та напружень по глибині ґрунту наведені відповідно на рис.2, 3 та 4.

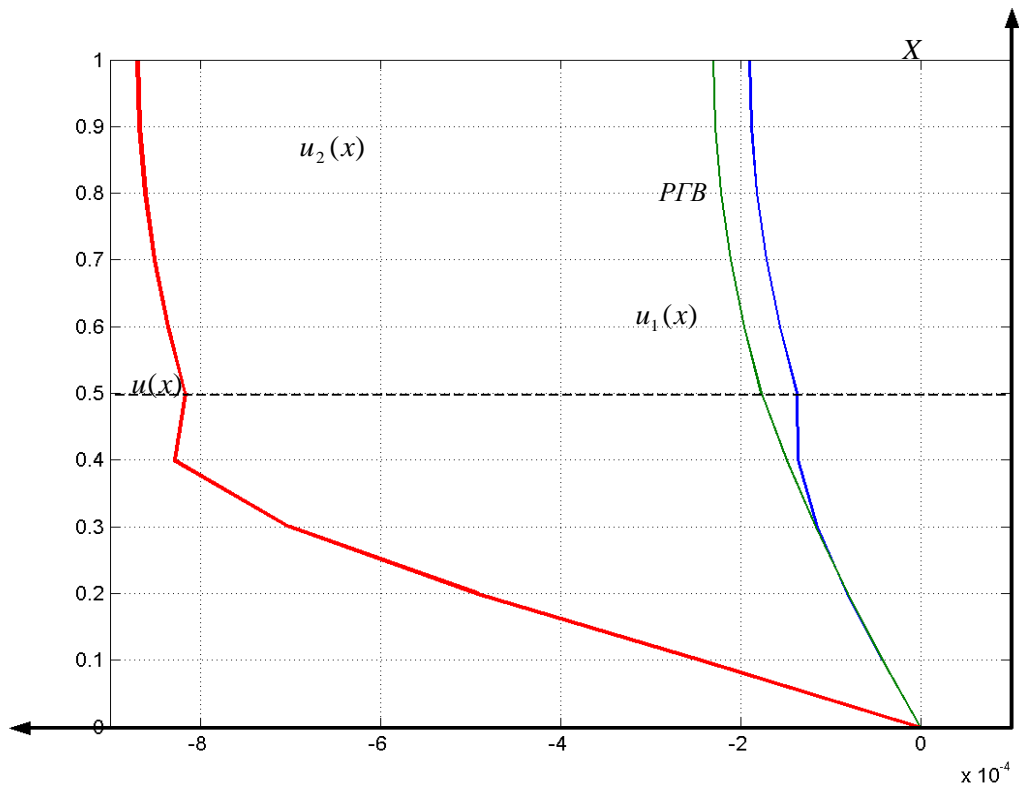


Рис.2. Графік розподілу переміщень в ґрунтовому масиві

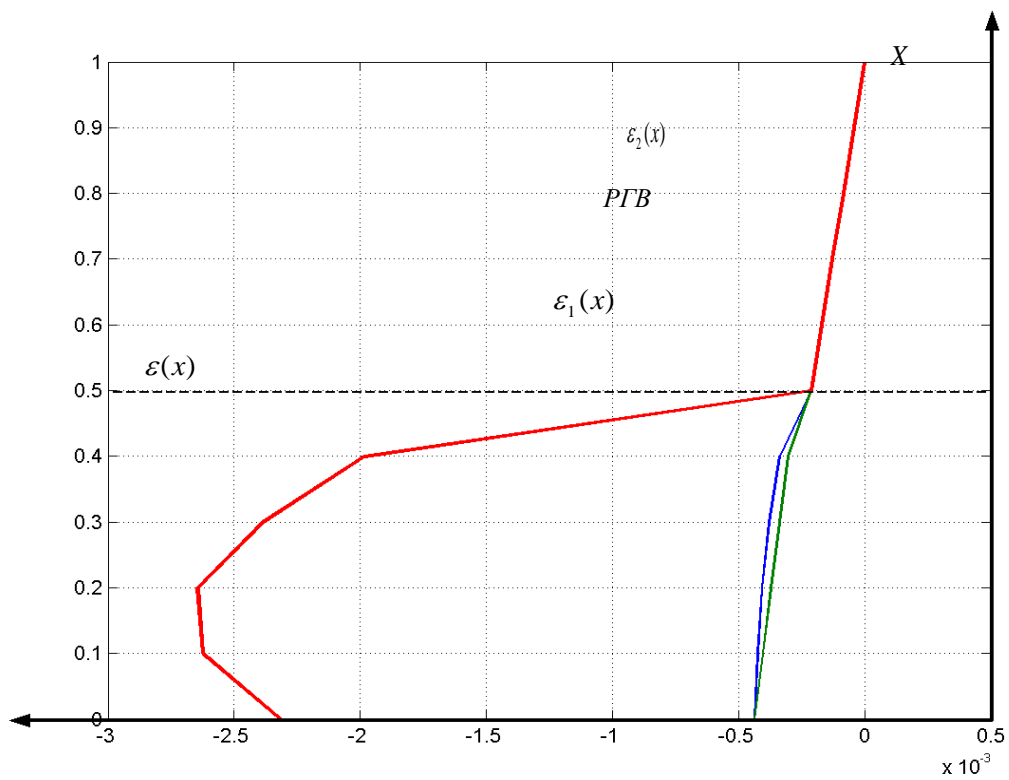


Рис.3. Графік розподілу деформацій в ґрунтовому масиві

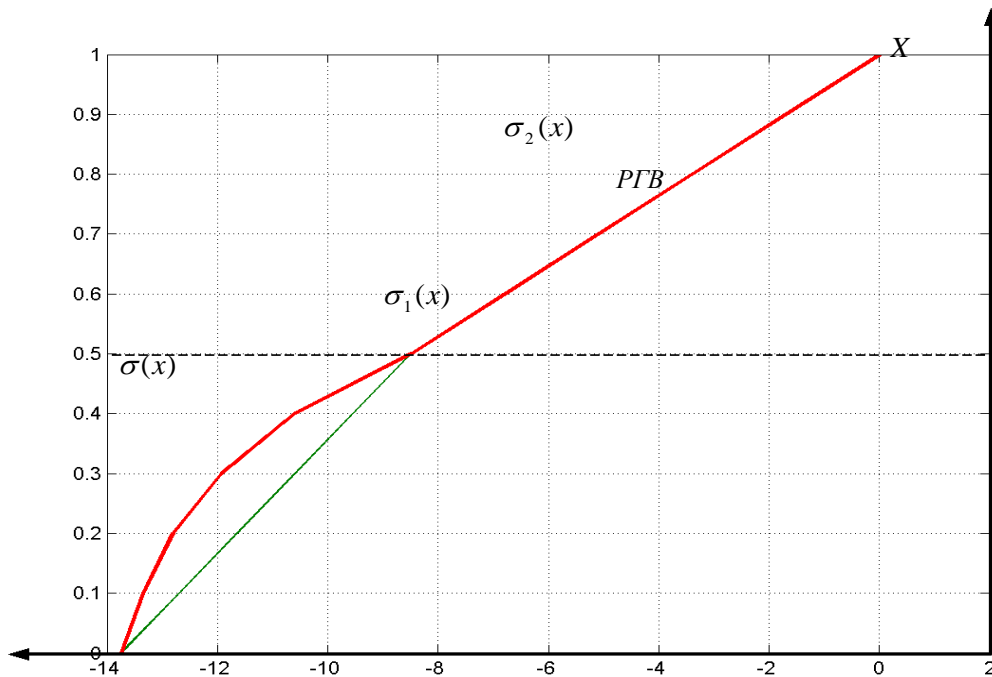


Рис.4. Графік розподілу напружень в ґрунтовому масиві

Графік розподілу напружень ґрунту з залежними від концентрації коефіцієнтами Ламе та напружень ґрунту зі сталими коефіцієнтами Ламе співпадають.

Висновки

Представлені математичні моделі дають можливість виконати оцінку напружено-деформованого стану ґрунтових масивів при змінних їх фільтраційних і деформаційних характеристиках, що обумовлені наявністю сольових розчинів. Вони можуть бути використані при оцінці ґрунтових основ промислових і цивільних будівель та споруд, експлуатація яких передбачається в умовах забруднення техногенними джерелами, зокрема розчинами солей. Подальшими дослідженнями можуть бути, отримання відповідних розв'язків в умовах плоскої задачі.

Література

1. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
2. Власюк А.П., Кузло М.Т. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах //Меліорація і водне господарство. – 2001.- Вип.87. – С.139-145.
3. Кузло М.Т., Філатова І.А. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Збірник наукових праць. НУВГП. Випуск 31. Рівне 2007. – С. 175-182.