

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВОДОНАСИЧЕНОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ У ПРОЦЕСІ ЙОГО ОСУШЕННЯ

При проектуванні об'єктів будівництва на водонасичених ґрунтових основах виникає необхідність у визначенні їх напружено-деформованого стану (НДС). Основними кількісними характеристиками НДС ґрунту основ є напруження, деформації та зміщення. Знаючи НДС ґрунту основи споруди, можна прогнозувати стійкість, надійність та безпеку експлуатації даного об'єкта.

Суттєві зміни НДС викликають: наповнення або спорожнення водоймищ; фільтрація рідини; пониження рівня ґрунтових вод тощо. Пониження рівня підземних вод викликає значне осідання поверхні землі на великих площах, які іноді займають сотні квадратних кілометрів.

Фізико-хімічні процеси також здійснюють значний вплив на ґрунтові масиви та розміщені на них споруди. Особливо у зв'язку з використанням все більш глибоких горизонтів земної кори як основи масивних споруд і середовища для влаштування підземних споруд.

**Аналіз останніх досліджень** показав, що існує ряд теоретичних рішень визначення НДС ґрунтових масивів [1,2]. Однак питання оцінки НДС водонасичених ґрунтових масивів у процесі їх осушення на будь-який момент часу недостатньо вивчено.

**Метою роботи** є отримання теоретичних залежностей, що описують положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві та вертикальні зміщення його поверхні при пониженні рівня води в горизонтальних відкритих дренах. При цьому в одній горизонтальній дрени пониження рівня води буде відбуватися з однією швидкістю, а в другій – з іншою.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу пониження рівня ґрунтових вод у ґрунтовому масиві шляхом відкачування води з відкритих горизонтальних дрена (рис.1).

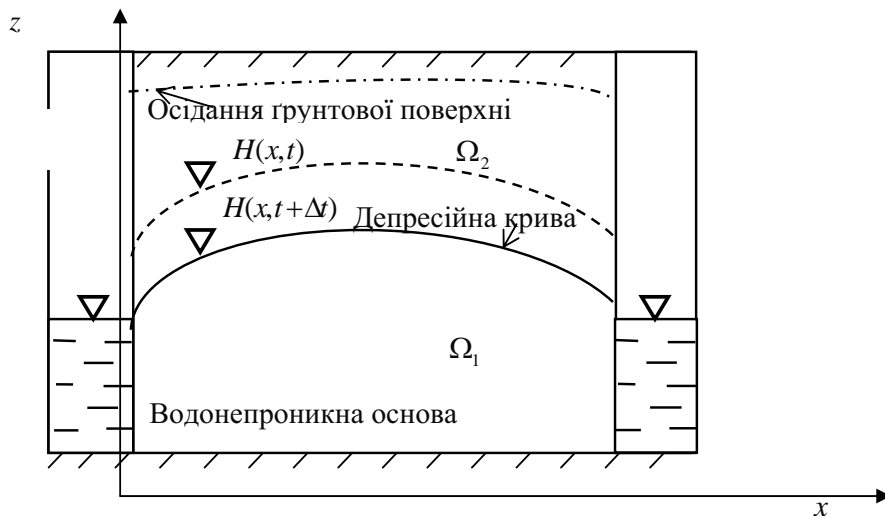


Рис. 1. Схема ґрунтового масиву при його осушенні

У зв'язку з осушенням верхньої частини ґрунту та інтенсивними фільтраційними потоками води змінюється НДС ґрунтового масиву, в результаті чого поверхня ґрунту починає просідати.

У результаті розв'язку задачі необхідно: розрахувати поле напорів води у ґрунтовому масиві; визначити НДС ґрунтового масиву; отримати зміщення верхньої межі ґрунтового масиву.

**Математична модель та розв'язання задачі.** Для проведення математичного моделювання даних процесів зроблено наступні припущення:

- 1) розглядається двовимірною задачею;
- 2) ґрунтовий масив має форму прямокутника, обмеженого з обох боків горизонтальними дренами, а знизу водонепроникною нерухомою основою;
- 3) пониження рівня води в горизонтальних дренах відбувається за лінійним законом зі швидкостями  $V_0$  та  $V_1$ ;
- 4) навантаження на поверхні ґрунту відсутні;
- 5) ґрунт розглядається як двофазне середовище;



6) за рахунок невисокої швидкості пониження рівня ґрунтових вод у дренажних системах розглядаються напори й зміщення у фіксовані моменти часу;

7) ґрунт вважається пружним середовищем, тому його можна розглядати в межах лінійної теорії пружності.

Для того, щоб знайти вертикальні зміщення ґрунтової поверхні, необхідно знати напори в усіх точках ґрунтового масиву на певний момент часу.

Для визначення напорів у змінній області  $\Omega_1 = \{(x, z, t) \mid x \in (0, l), z \in (0, h(x, t)), t > 0\}$  знайдемо розв'язок диференціального рівняння нестационарної фільтрації, що має вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{kh_{col}}{\mu} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

при таких крайових умовах:

$$H(x, z, 0) = H_1(x, z), \quad (2)$$

$$H(0, z, t) = H_0(0) - V_0 t, \quad (3)$$

$$H(l, z, t) = H_0(l) - V_1 t, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H(x, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$H(x, h(x, t), t) = h(x, t), \quad (6)$$

де  $H(x, z, t)$  – напір води в момент часу  $t$  у точці  $(x, z)$  ґрунтового масиву;  $k$  – коефіцієнт фільтрації;  $h_{col}$  – потужність фільтраційного потоку;  $\mu$  – коефіцієнт водовіддачі;  $H_1(x, z)$  – розподіл напорів у початковий момент часу;  $H_0(x)$  – висота розміщення ґрунтових вод у початковий момент часу (відома функція);  $h(x, t)$  – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу  $t$ .

Введемо позначення

$$a^2 = \frac{kh_{col}}{\mu}. \quad (7)$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

Для розв'язання цієї задачі потрібно знайти  $h(x, t)$  та  $H_1(x, z)$ . У зв'язку з цим розглянемо дві допоміжні задачі.

**Задача 1.** В області  $\Omega = \{(x, t) \mid x \in (0, l), t > 0\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (9)$$

при таких крайових умовах:

$$h(x, 0) = H_0(x), \quad (10)$$

$$h(0, t) = H_0(0) - V_0 t, \quad (11)$$

$$h(l, t) = H_0(l) - V_1 t. \quad (12)$$

**Задача 2.** В області  $\Omega = \{(x, z) \mid x \in (0, l), z \in (0, H_0(x))\}$  знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

при таких крайових умовах:

$$\frac{\partial H_1(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$H_1(0, z) = H_0(0), \quad (15)$$

$$H_1(l, z) = H_0(l), \quad (16)$$

$$H_1(x, H_0(x)) = H_0(x). \quad (17)$$

Розв'яжемо задачу (9)-(12). Вимагаємо, щоб  $H_0(x) \in C^{(1)}(0, l)$ .



Зведемо однорідне рівняння до неоднорідного, але з однорідними граничними умовами. Для цього проведемо заміну

$$h(x,t) = v(x,t) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l} x. \quad (18)$$

Отримаємо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x), \quad (19)$$

$$v(x,0) = H_0(x) - H_0(0) - \frac{H_0(l) - H_0(0)}{l} x, \quad (20)$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad (21)$$

де  $f(x) = V_0 + \frac{V_l - V_0}{l} x. \quad (22)$

Позначимо  $v(x,0) = \varphi(x)$ .

Розв'язок даної задачі на основі [3] має вигляд:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (23)$$

де  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (24)$

Функції  $f_n$  у даному випадку обчислюються наступним чином:

$$f_n = \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n). \quad (25)$$

Підставивши  $f_n$  в отриманий розв'язок та звівши доданки біля однакових  $\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ , отримаємо

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right). \quad (26)$$

Повернувшись до заміни, отримаємо

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l} x. \quad (27)$$

Після спрощення, рівняння (27) можна записати у вигляді

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n) \left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l} x, \quad (28)$$

де  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l H_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx + \frac{2}{\pi n} (-H_0(0) + H_0(l) (-1)^n). \quad (29)$

Цю ж задачу ми розв'язали числовими методами за допомогою явної та неявної різницьових схем. Усі три результати співпали в межах заданої точності.

Тепер, коли ми впевнились у правильності розв'язку задачі (9)-(12), приступимо до розв'язання задачі (13)-(17).

Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області

$\Omega = \{(x, z) \mid x \in (0, l), z \in (0, H_0(x))\}$  на параметричний прямокутник. Побудована сітка конформного відображення є гідродинамічною сіткою, тобто розв'язком задачі. Значення напорів на лініях рівних напорів рівні значенням у верхніх точках цих ліній, які, в свою чергу, рівні вертикальній координаті поверхні ґрунтових вод.

Для розв'язання задачі (8),(2)-(6) перейдемо до змінних  $\xi, \eta$ :

$$\xi = \xi(x, z), \eta = \eta(x, z). \quad (30)$$

З умов Коші-Рімана маємо:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (31)$$

Підставивши (30) у (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = a^2 & \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Враховавши те, що  $\xi(x, z)$  та  $\eta(x, z)$  – спряжені гармонічні функції, матимемо

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right). \quad (33)$$

Оскільки отримане рівняння досить складне, ускладнюються також крайові умови, проведемо спрощення згідно вище зробленого припущення про повільне відкачування води із дрен. Прийемо

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ . Тоді рівняння (33) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0. \quad (34)$$

У цьому випадку побудована при чисельному конформному відображенні сітка буде гідродинамічною сіткою, тобто розв'язком задачі (8),(2)-(6). Розв'язання буде аналогічним, як розв'язання задачі (14)-(18). При цьому використовуємо отримані точні формули для  $h(x, t)$  (для обчислення застосовуються заміна суми ряду скінченною сумою, інтегрування методом парабол). Перевагою даного підходу є те, що ми можемо знаходити напори й зміщення в будь-який момент часу, не знаходячи їх у попередні моменти часу (лише у початковий момент часу).

Розв'яжемо задачу (8), (2)-(6) без спрощення рівняння (33). Для розв'язання параболічного рівняння (33) застосуємо два методи: ітераційний та локально-одновимірну схему Самарського.

Між модулями похідних справедливе співвідношення

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2}. \quad (35)$$

З урахуванням (35) (33) набуде вигляду

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a^2}{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right). \quad (36)$$

Як початкову умову для обох методів використаємо гідродинамічну сітку, побудовану для задачі (13)-(17).

Розглянемо ітераційний метод. Нехай знайдено значення функції  $H$  у вузлах сітки області у площині  $xOz$  на перших  $k$  кроках по часу,  $k \geq 0$ . На  $k+1$  кроці задаємо початкові значення функції  $H$  на кожній вертикалі рівні значенню напору у верхній точці, тобто координаті РГВ.

Провівши різницеву апроксимацію рівняння (36), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^k}{\tau} = & \frac{a^2}{\left( \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_i} \right)^2 + \left( \frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_i} \right)^2} \times \\ & \times \left( \frac{H_{i+1,j}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_i^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_j^2} \right), \end{aligned} \quad (37)$$

де  $h_i$  – крок сітки по  $\xi$ ,  $h_j$  – крок по  $\eta$ .

Позначимо

$$b_{ij}^{k+1} = \frac{a^2 \tau}{\left( \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_i} \right)^2 + \left( \frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_i} \right)^2}. \quad (38)$$

Величина  $b_{ij}^{k+1}$  не змінюється під час ітерацій, залежить лише від конформної сітки на  $k+1$  кроці по часу.

Для уточнення значення функції виразимо  $H_{ij}^{k+1}$  з рівняння (37).

$$H_{ij}^{k+1} = \frac{\left( H_{ij}^k + b_{ij}^{k+1} \left( \frac{H_{i+1,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_i^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_j^2} \right) \right)}{1 + 2b_{ij}^{k+1} \left( \frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_j^2} \right)}. \quad (39)$$

Ітерації проводимо, поки максимальна різниця між значеннями функції на двох послідовних ітераціях більша від заданої точності  $\varepsilon$ . Але значення  $H_{ij}^k$  відоме в попередній момент часу на попередній сітці.

Для знаходження  $H_{ij}^k$  у вузлі  $(i, j)$  поточної сітки використаємо інтерполяцію по чотирикутнику попередньої сітки, в який потрапляє вузол  $(i, j)$  поточної сітки. Цю операцію потрібно проводити на початку  $k+1$  кроку, бо сітка під час ітерацій, а отже, й розташування вузла  $(i, j)$  незмінні. Хоча недоліком ітераційного методу для параболічних рівнянь є проблема швидкодії, в даному випадку вона несуттєва, бо побудова ітераційним методом конформної сітки займає значно більше часу, ніж уточнення значення функції у її вузлах (при однаковій точності).

Розглянемо локально-одновимірну схему Самарського. Провівши різницеву апроксимацію рівняння (36) на кроці  $k+0,5$ , отримаємо

$$\frac{H_{ij}^{k+0,5} - H_{ij}^k}{0,5\tau} = \frac{a^2}{\left( \frac{x_{i+1,j}^k - x_{i-1,j}^k}{2h_i} \right)^2 + \left( \frac{z_{i+1,j}^k - z_{i-1,j}^k}{2h_i} \right)^2} \cdot \frac{H_{i+1,j}^{k+0,5} - 2H_{ij}^{k+0,5} + H_{i-1,j}^{k+0,5}}{h_i^2}. \quad (40)$$

Як видно з рівняння, ми не будемо сітку на половинному кроці по часу і нехтуємо різницею сіток на двох сусідніх кроках по часу. Крайові умови мають вигляд

$$H_{0j}^{k+0,5} = \frac{H_{0j}^k + H_{0j}^{k+1}}{2}, \quad H_{nj}^{k+0,5} = \frac{H_{nj}^k + H_{nj}^{k+1}}{2}, \quad (41)$$

де  $n$  – кількість кроків по  $\xi$ .

На  $k+1$  кроці апроксимація рівняння (36) має вигляд

$$\frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^{k+0,5}}{0,5\tau} = \frac{a^2}{\left( \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_i} \right)^2 + \left( \frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_i} \right)^2} \cdot \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_j^2}. \quad (42)$$

Крайові умови

$$H_{i0}^{k+1} = H_{i1}^{k+1}, \quad H_{im}^{k+1} = h(ih_i, (k+1)\tau), \quad (43)$$

де  $h(x, t)$  – знайдений розв'язок задачі (9)-(12).

Розв'язок задачі на кроках  $k+0,5$ ,  $k+1$  знаходимо методом прогонки,  $k \geq 0$ .

Перевагами ітераційного методу над методом Самарського є врахування зміни сітки на послідовних кроках по часу, а також те, що зі зменшенням розмірів області  $\Omega_1$  при використанні ітераційного методу можна зменшувати кількість ліній сітки по вертикалі (кількість кроків по  $\eta$ ).

Після проведення чисельних експериментів отримано наступні результати: значення зміщень, розраховані за методом, описаним нижче, при використанні трьох вище описаних способів знаходження напорів практично однакові (майже непомітні візуально, лінії поверхні землі в різні моменти часу накладаються). Крім того похибки не накопичуються з часом, тобто всі три результати практично



рівнозначні. Враховуючи те, що при великій кількості спрощуючих припущень знаходження зміщень не претендує на високу точність, можна зробити висновок про доцільність застосування простого і дуже швидкого методу на основі рівняння (34).

Рух вільної поверхні ґрунтових вод веде до виникнення різноманітних об'ємних сил і зміни НДС ґрунтового масиву [4]. Нерідко трапляється так, що інтенсивне пониження рівня ґрунтових вод призводить до виникнення в ґрунтових масивах значних осідань поверхні землі і, як наслідок цього, деформації будівель та споруд у вигляді тріщин, а іноді їх руйнування.

Розглянемо зміщення ґрунту в точці  $x = x_1$  у момент часу  $t = t_1$ .

Для знаходження зміщень в областях ґрунтового масиву нижче рівня ґрунтових вод  $\Omega_1$  та вище рівня ґрунтових вод  $\Omega_2$  маємо систему диференціальних рівнянь

$$k_1 \frac{d^2 u_1}{dz^2} = \gamma_{sb} + \gamma_w \left( \frac{dh}{dz} - 1 \right), x \in (0, l_1), \quad (44)$$

$$k_2 \frac{d^2 u_2}{dz^2} = \gamma_n, x \in (l_1, l), \quad (45)$$

$$u_1(0) = 0, \quad (46)$$

$$\frac{du_2(l)}{dz} = 0, \quad (47)$$

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \quad (48)$$

$$k_1 \frac{du_1(l_1)}{dz} = k_2 \frac{du_2(l_1)}{dz}, \quad (49)$$

де  $\gamma_{sb}$  – питома вага ґрунту, що знаходиться у зваженому стані;  $\gamma_n$  – питома вага ґрунту, що знаходиться у природному стані;  $\gamma_w$  – питома вага води;  $h(z)$  – напір у точці  $(x_1, z)$  на момент часу  $t_1$ ;  $k_1 = \lambda_1 + 2\mu_1, k_2 = \lambda_2 + 2\mu_2$  – пружні сталі;  $u_1(z), u_2(z)$  – зміщення точки, яка у момент  $t_1$  знаходиться у точці  $(x_1, z)$ ;  $l_1$  – рівень ґрунтових вод, а  $l$  – шукана вертикальна координата верхньої точки ґрунтового масиву в точці  $x = x_1$  у момент часу  $t = t_1$ ; індекси 1, 2 біля  $k, \lambda, \mu, u$  означають розміщення точки  $(x_1, z)$  нижче або вище РГВ відповідно.

Інтегруючи рівняння (44), (45), отримуємо

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{\gamma_{sb} z}{k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} (h(z) - z) + c_1, \quad (50)$$

$$u_1 = \frac{\gamma_{sb} z^2}{2k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} \left( \int_0^z h(\xi) d\xi - \frac{z^2}{2} \right) + c_1 z + c_2, \quad (51)$$

$$\frac{du_2}{dz} = \frac{\gamma_n z}{k_2} + c_3, \quad (52)$$

$$u_2 = \frac{\gamma_n z^2}{2k_2} + c_3 z + c_4, \quad (53)$$

Підставляючи (51) у (46), отримуємо

$$c_2 = 0.$$

Підставляючи (52) у (47), отримуємо

$$c_3 = -\frac{\gamma_n l}{k_2}. \quad (54)$$

Із (49), (50), (52), (54) маємо

$$\gamma_{sb} l_1 + \gamma_w (h(l_1) - l_1) + c_1 k_1 = \gamma_n l_1 - \gamma_n l.$$

Враховуючи, що  $h(l_1) = l_1$ , отримаємо

$$c_1 = \frac{1}{k_1} (\gamma_n (l_1 - l) - \gamma_{sb} l_1).$$

Підставляючи в (48) (51), (53), знайдені константи  $c_1, c_2, c_3$ , маємо



$$\frac{\gamma_{sb}l_1^2}{2k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} \left( \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{l_1^2}{2} \right) + c_1 l_1 = \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} - \frac{\gamma_n l_1 l}{k_2} + c_4,$$

$$c_4 = \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2k_1} + \frac{\gamma_w}{k_1} \left( \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{l_1^2}{2} \right) + \frac{l_1}{k_1} (\gamma_n (l_1 - l) - \gamma_{sb} l_1) - \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} +$$

$$+ \frac{\gamma_n l_1 l}{k_2} = \frac{1}{k_1} \left( \gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{\gamma_w l_1^2}{2} - \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} + \gamma_n (l_1^2 - l_1 l) \right) + \frac{\gamma_n l_1}{k_2} \left( l - \frac{l_1}{2} \right).$$

Оскільки ми враховуємо всі фактори тиску на ґрунт, зміщення знаходяться відносно деякого початкового рівня  $l_0$ . Цей початок відліку необхідно знайти, використовуючи відоме в початковий момент значення  $l$ .

$$u_2(l) = l - l_0, \quad (55)$$

Із (53), (54) отримаємо

$$u_2(l) = \frac{\gamma_n l^2}{2k_2} - \frac{\gamma_n l^2}{k_2} + c_4 = -\frac{\gamma_n l^2}{2k_2} + c_4. \quad (56)$$

Підставляючи (55), знайдене значення  $c_4$  у рівняння (56), отримаємо

$$l_0 = l + \frac{\gamma_n l^2}{2k_2} - \frac{1}{k_1} \left( \gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi - \frac{\gamma_w l_1^2}{2} - \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} + \gamma_n (l_1^2 - l_1 l) \right) - \frac{\gamma_n l_1 l}{k_2} + \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2}. \quad (57)$$

Підставивши в отриману формулу значення відомих величин у початковий момент часу, знайдемо  $l_0$ .

Для знаходження  $l$  у будь-який момент часу з (57) отримуємо квадратне рівняння:

$$\left( \frac{\gamma_n}{2k_2} \right) l^2 + \left( \frac{\gamma_n l_1}{k_1} + 1 - \frac{\gamma_n l_1}{k_2} \right) l + \left( -l_0 + \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} + \frac{1}{k_1} \left( -\gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi + \frac{\gamma_w l_1^2}{2} + \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} - \gamma_n l_1^2 \right) \right) = 0. \quad (58)$$

Розв'язавши квадратне рівняння (58), знайдемо вертикальну координату деформованої верхньої межі ґрунту для довільних значень  $x$  і  $t$ .

$$l = \frac{k_2}{\gamma_n} \left( -1 + \gamma_n l_1 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + \left( \left( -1 + \gamma_n l_1 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)^2 - \left( \frac{2\gamma_n}{k_2} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left( -l_0 + \frac{\gamma_n l_1^2}{2k_2} + \frac{1}{k_1} \left( -\gamma_w \int_0^{l_1} h(\xi) d\xi + \frac{\gamma_w l_1^2}{2} + \frac{\gamma_{sb} l_1^2}{2} - \gamma_n l_1^2 \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (59)$$

Ми вибрали знак “+” перед коренем квадратним з урахуванням того, що  $l > 0$ .

Для знаходження інтегралу від функції напору  $\int_0^{l_1} h(\xi) d\xi$  використаємо побудовану конформну сітку.

Алгоритм знаходження інтегралу в точці  $x = x_1$  у момент часу  $t = t_1$  можна записати таким чином. На конформній сітці для часу  $t = t_1$  проводимо вертикальну пряму  $x = x_1$ . У точках перетину цієї прямої з лініями  $\eta = const$  сітки знаходимо значення напору за допомогою лінійної інтерполяції між сусідніми вузлами. Знаходимо інтеграл за допомогою формули центральних прямокутників для нерівномірно розміщених вузлів. Цей алгоритм просто реалізується на мові програмування з використанням аналітичної геометрії.

Для прикладу виконано числові розрахунки при наступних вхідних даних:

$$\lambda_1 = 25220 \text{ кг} / \text{м}^2; \lambda_2 = 30000 \text{ кг} / \text{м}^2; \mu_1 = 16800 \text{ кг} / \text{м}^2; \mu_2 = 20000 \text{ кг} / \text{м}^2; \mu = 0,15;$$

$$k_x = k_z = 0,5 \text{ м} / \text{добу}; \gamma_{np.} = 16,5 \text{ кН} / \text{м}^3; \gamma_w = 9,8 \text{ кН} / \text{м}^3; L = 100 \text{ м}; l(x,0) = 40 \text{ м}; V_0 = 0,1 \text{ м} / \text{добу};$$

$$V_1 = 0,2 \text{ м} / \text{добу};$$

Результати обчислень наведені на рис. 2-4, на яких показано поверхню ґрунту та гідродинамічну (або конформну) сітку на початковий момент часу та через 36 і 72 доби після пониження рівня води в горизонтальних дренах. Із рисунків видно, що разом зі зниженням рівня ґрунтових вод відбувається осідання поверхні ґрунтового масиву.



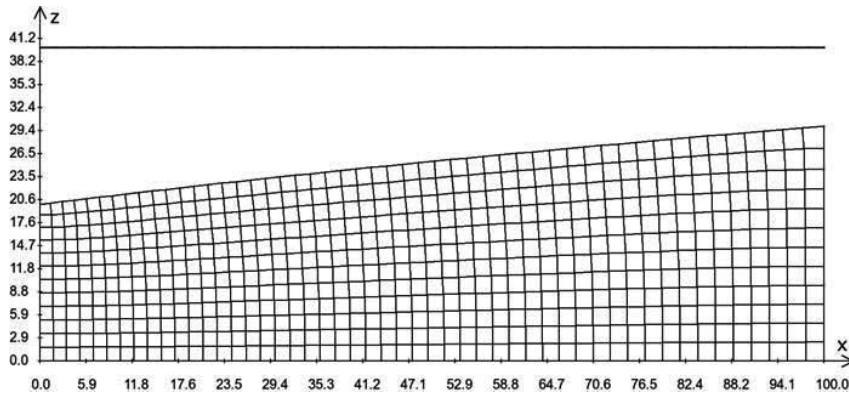


Рис. 2. Поверхня ґрунтового масиву та гідродинамічна сітка в початковий момент часу  $t = 0$

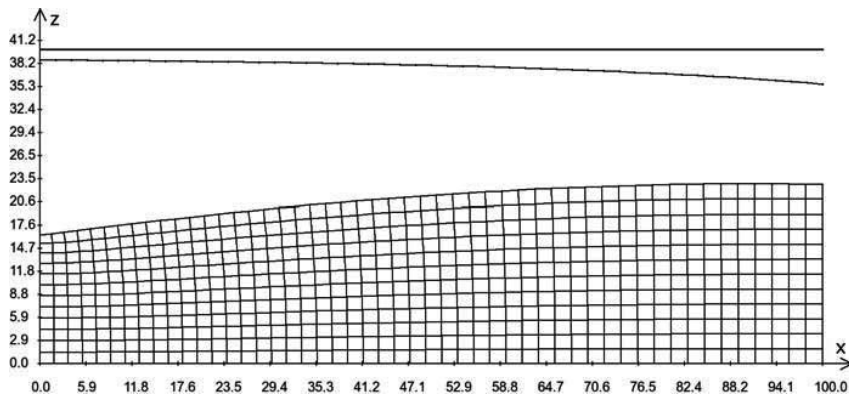


Рис. 3. Поверхня ґрунтового масиву та конформна сітка при пониженні рівня води в горизонтальних дренах на момент часу  $t = 36$  діб

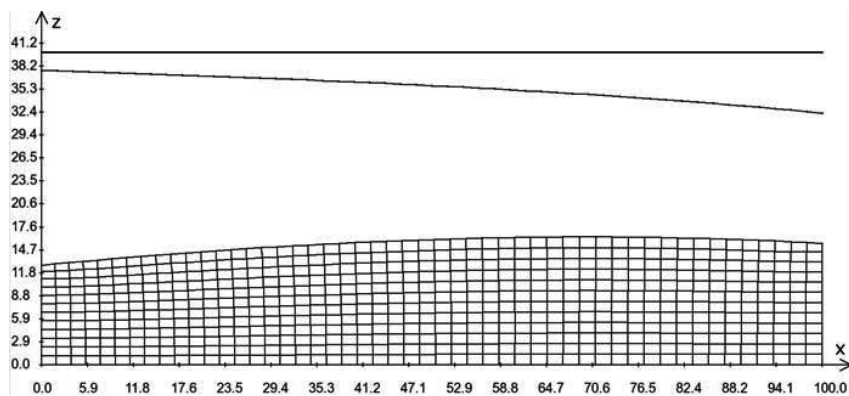


Рис.4. Поверхня ґрунтового масиву та конформна сітка при пониженні рівня води в горизонтальних дренах на момент часу  $t = 72$  доби

**Висновки.** В даній роботі було розглянуто лише одну з багатьох інженерних задач оцінки напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву в процесі його осушення шляхом відкачування води з горизонтальних дрен. Розглянуто двовимірну математичну модель, що у багатьох випадках може відповідати вимогам практики. У даній роботі було значно спрощено математичні моделі процесів фільтрації, що, безумовно, впливає на точність визначення НДС. Виконані числові експерименти показують вплив пониження рівня ґрунтових вод на НДС.

Розглянуту задачу можна розширювати для врахування різноманітних факторів, що дозволить отримати точніший розв'язок. Простий розв'язок, що розглянутий в даній роботі, має перевагу в можливості знаходження НДС ґрунтового масиву в будь-який окремий момент часу без знаходження НДС в попередні моменти часу. Подальшим дослідженням у даному напрямку є отримання відповідних рішень для багат шарових ґрунтових масивів.

#### Література

1. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.– К.: 1991.– 432 с.







2. Власюк І.А., Кузло М.Т. Математичне моделювання напружено-деформівного стану ґрунтових масивів у процесі руху вільної поверхні// Тез. Всеукр. наук. конф. “ Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики ”. – Львів, 2004. – С. 36.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
4. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов. –М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.

