



УДК 625.74
©2012

Петрович В.В., канд.тех.наук, Скрипник Т.В., канд.тех.наук, Скрипник В.Ю., аспірант

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ВОДОПЕРЕПУСКНОЇ ТРУБИ ПІД НАСИПОМ АВТОМОБІЛЬНОЇ ДОРОГИ

Анотація. В статті розглянута побудова математичної моделі напруженого стану водоперепускної труби під невисоким насипом автомобільної дороги, як нескінченно довгої тонкостінної циліндричної оболонки, що навантажена колесами двох проїжджаючих автомобілів по двох смугах руху.

Ключові слова: математична модель, довга тонкостінна циліндрична оболонка, смуга руху, автомобільна дорога, невисокий насип.

Аннотация. В статье рассмотрено построение математической модели напряженного состояния водопропускной трубы под невысокой насыпью автомобильной дороги, как бесконечно длинной цилиндрической оболочки, которая нагружена колесами двух проезжающих автомобилей по двум полосам движения.

Ключевые слова: математическая модель, длинная тонкостенная цилиндрическая оболочка, полоса движения, автомобильная дорога, невысокая насыпь.

Annotation. Article contains mathematical model construction of the stress state of a culvert under low highway embankment, as infinitely a long cylindrical cover, which is stressed by two passing cars wheels on two lane road.

Keywords: A mathematical model, a long cylindrical cover, lane, highway, a low highway embankment.

Вступ. Циліндричні оболонки (тонкостінні циліндри) являють собою найбільш поширений вид оболонок обертання [1].

Теорія деформації циліндричних оболонок заснована на гіпотезах Кірхгофа–Лява, аналогічних гіпотезам, використовуваним в теорії вигину пластин [1], а саме:

1. Гіпотеза незмінності нормалей. Приймають, що нормалі до серединної поверхні оболонки не викривляються і залишаються перпендикулярними до деформованої серединної поверхні. Ця гіпотеза встановлює зв'язок між деформованим станом в довільній точці стінки оболонки і зміною геометрії її серединної поверхні і дозволяє таким чином звести дослідження деформації оболонки до дослідження деформації її серединної поверхні.

2. Гіпотеза про ненавискування одного шару оболонки на інший. Відповідно до цієї гіпотези, нормальні напруги в майданчиках, паралельних серединній поверхні, вважають рівними нулю, тобто напружений стан розглядають як плоский замість об'ємного.

Основна частина. Зазначені гіпотези виконуються досить задовільно за умови, що товщина оболонки мала в порівнянні з радіусом циліндра і що переміщення точок серединної поверхні малі в порівнянні з товщиною. Якщо найбільшу допустиму похибку розрахунку прийняти рівною 5%, то до тонкостінних слід віднести оболонки, товщина яких не перевищує 1/20 (в окремих випадках 1/5) радіусу.

Крім перерахованих гіпотез і припущень приймемо, що матеріал оболонки однорідний, ізотропний і підпорядковується закону Гука.

Введемо позначення: r – радіус циліндру (середній); h – товщина стінки циліндру; x – координата, що відраховується від торця в напрямку вісі циліндру; u , w – переміщення довільної точки серединної поверхні в осьовому і в радіальному напрямках.

Висловимо відносні деформації в довільному шарі оболонки, розташованому на відстані z від серединної поверхні, через переміщення (z будемо вважати додатним у напрямку до центру). На рис. 2.1 Зображено безмежно малий елемент оболонки до і після деформації.

Відносні деформації волокна ab в осьовому напрямку:

$$s_x = \frac{du + d\vartheta z}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} z, \quad (1)$$

де $\vartheta = \frac{dw}{dx}$ – кут повороту нормалі.

Відносна деформація в окружному напрямку визначається як співвідношення прирощення



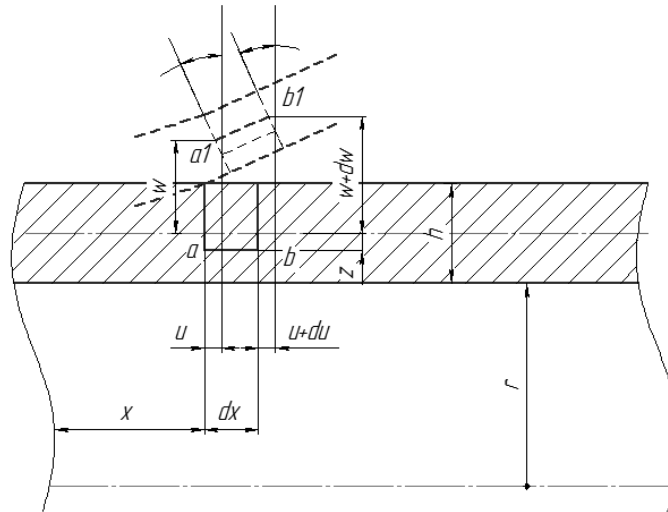


Рисунок 2.1 – Нескінченно малий елемент оболонки

довжини окружності, що проходить через довільну точку а, до початкової довжини, через тонкостінність буде мати вигляд:

$$\varepsilon_t = \frac{w}{r} \quad (2)$$

Перейдемо від деформацій до напружень. При $\sigma_z = 0$ формули закону Гука мають вигляд:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x - \mu \varepsilon_t); \quad (3)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t - \mu \varepsilon_x) \quad (4)$$

Підставивши в ці рівняння вирази деформацій отримаємо:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} z + \mu \frac{w}{r} \right); \quad (5)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2} z \right); \quad (6)$$

Перейдемо від напруг до внутрішніх силових факторів. При інтегруванні по товщині оболонки напруження σ_x, σ_t приводяться до нормальних зусиль і згинальних моментів M_x та M_t :

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{r} \right); \quad (7)$$

$$T_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} \right); \quad (8)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = D \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad (9)$$

$$M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t z dz = \mu D \frac{d^2 w}{dx^2} = \mu M_x, \quad (10)$$

де D – згинальна жорсткість оболонки;

$$D = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)}. \quad (11)$$



Виключивши з рівнянь (7) і (8) переміщення u , отримаємо вираз окружного зусилля T_t через w та T_x :

$$T_t = \mu T_x + \frac{Ehw}{r}. \quad (12)$$

Рівняння (10), (11) та (12) мають п'ять невідомих величин: M_x, M_t, T_x, T_t, w .

Щоб отримати неvistачаючі рівняння, розглянемо рівновагу елементарного об'єму, виділеного з оболонки двома поздовжніми і двома поперечними перетинами. Крім сил T_x і T_t і моментів M_x, M_t , на елемент діють сили поверхневого навантаження.

З шести рівнянь рівноваги в даному випадку можна скласти тільки три: рівняння проєкцій сил на напрямки r та x і рівняння моментів відносно вісі y , дотичної до окружності:

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{T_t}{r} = p_1 \quad (13)$$

$$\frac{dT_x}{dx} = p_2 \quad (14)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q \quad (15)$$

Решта рівнянь рівноваги задовольняються тотожно. При вирішенні отриманої системи рівнянь осьову силу T_x можна вважати відомою, так як вона може бути визначена заздалегідь за рівнянням (14). Дійсно, помноживши обидві частини рівняння на $2\pi r$ і проінтегрувавши по x , знайдемо:

$$2\pi r T_x = \int p_2 2\pi r dx + C \quad (16)$$

Це рівняння є рівнянням рівноваги частині оболонки, відтятою по колу $x = \text{const}$. Перша складова у правій частині рівності являє собою інтеграл від поверхневих осьових сил, друге – враховує сили, прикладені до торця.

Приведемо систему рівнянь деформацій і рівноваги до одного рівняння з одним невідомим. З рівняння (15), з урахуванням рівності (9) слідує:

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (17)$$

Вирази (12) та (16) підставимо у рівняння (13), тоді:

$$p_1 r - Dr \frac{d^4 w}{dx^4} - \mu T_x - \frac{Ehw}{r} = 0 \quad (18)$$

або

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta w = -\frac{\mu T_x}{Dr} + \frac{p_1}{D}, \quad (19)$$

де

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}} \quad (20)$$

Отже, ґрунтуючись на [2] загальне рішення однорідного рівняння має вигляд:

$$\dot{w} = C_1 e^{(\beta+\beta i)x} + C_2 e^{(-\beta+\beta i)x} + C_3 e^{(-\beta-\beta i)x} + C_4 e^{(\beta-\beta i)x}$$

або

$$\dot{w} = e^{-\beta x} (C_2 e^{i\beta x} + C_3 e^{-i\beta x}) + e^{\beta x} (C_1 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}), \quad (21)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – постійні інтегрування (комплексні).



Зазвичай на практиці навантаження p_1 і p_2 або постійні, або змінюються по x , за лінійним або квадратичним законом. Обмежувачись тільки цими випадками і враховуючи, що при зазначених умовах $\frac{d^4 p_1}{dx^4} = 0$ та $\frac{d^4 T_x}{dx^4} = 0$ ($\frac{d^3 p_2}{dx^3} = 0$), отримаємо для \bar{w} наступний вираз:

$$w = \frac{1}{4\beta^4} \left(-\frac{\mu T_x}{Dr} + \frac{p_1}{D} \right) = \left(p_1 - \frac{\mu T_x}{r} \right) \frac{r^2}{Eh} \quad (22)$$

Стосовно до розрахунку довгих оболонки вираз (21) доцільно перетворити таким чином [3]. Використовуючи формули Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \quad (23)$$

замінімо показові функції на тригонометричні, тоді вираз (18) набуде вигляду:

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x) + \bar{w}, \quad (24)$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 – нові постійні (дійсні).

Перша складова, що містить множник $e^{-\beta x}$, зі збільшенням x швидко згасає. Друга складова, що містить множник $e^{\beta x}$, навпаки, швидко зростає. Враховуючи, що радіальні переміщення w при великих значеннях x повинні залишатися кінцевими і малими, можна зробити висновок, що постійні A_3 і A_4 повинні бути дуже малі. В області, розташованій поблизу від початку координат, другим складовою можна знехтувати, тобто покласти $A_3 = A_4 = 0$; тоді:

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + \bar{w}, \quad (25)$$

У такому вигляді функція придатна для області, розташованої біля краю при $x = 0$. Для області, що знаходиться біля другого краю друга складова не може бути відкинута, так як множник $e^{\beta x}$ приймає дуже великі значення.

Проте для другого краю можна обрати новий початок координат, розташувавши його на другому торці оболонки і направивши вісь x в протилежну сторону. Тоді можна знову скористатися виразом (25) і, визначивши нові постійні A_1 та A_2 отримати функцію w для області, розташованої біля другого краю оболонки.

З'ясуємо, при якій довжині оболонки її припустимо розглядати як довгу. Вважаючи гранично допустиму похибку розрахунку рівної 5% і помічаючи, що функції вигляду $e^{-\beta x} \sin \beta x$ та $e^{-\beta x} \cos \beta x$, а також їх похідні при $\beta x > 3$ приймають значення менше 0,05, укладаємо, що оболонку можна розглядати як довгу, якщо $\beta l \geq 3$; та $l \geq 2,5\sqrt{rh}$

При дотриманні цієї умови похибка рішення, отримана при застосуванні спрощеного виразу (25), не перевищує 5%.

Для практичних розрахунків довгих циліндричних оболонки, однак, більш зручно застосовувати формули, в яких постійні інтегрування виражені через деякі початкові параметри.

Приймемо за початкові параметри величини M_0 і Q_0 і виразимо через них постійні A_1 і A_2 .

Запишемо граничні умови

$$x = 0; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_0}{D};$$

$$x = 0; \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{Q_0}{D}.$$

За цими умовами знайдемо значення постійних:

$$A_1 = -\frac{M_0}{2D\beta^2}; \quad A_2 = \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3} \quad (26)$$

Використовуючи залежності (9), (10) і (11), отримаємо такі вирази для радіального переміщення w , кута нахилу нормалі ϑ і внутрішніх силових факторів M_x , M_t , і T_t :

$$w = \frac{M_0}{2D\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \frac{Q_0}{2D\beta^3} e^{-\beta x} \cos \beta x + \bar{w} \quad (27)$$

$$\vartheta = \frac{dw}{dx} = -\frac{M_0}{D\beta} e^{-\beta x} \cos \beta x - \frac{Q_0}{2D\beta^3} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \frac{d\bar{w}}{dx} \quad (28)$$

$$M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x + D \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \quad (29)$$

$$Q = -2M_0 \beta e^{-\beta x} \sin \beta x + Q_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + D \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} \quad (30)$$

$$T_t = 2r\beta^2 \left[M_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \cos \beta x \right] + p_1 r \quad (31)$$

де \bar{w} – частинний розв'язок диференціального рівняння з правою частиною. Значення функцій, що входять у вирази (27) – (31), дані в табл. 8.1 [4].

Для побудови математичної моделі напруженого стану водоперепускної труби під насипом автомобільної дороги від рухомого складу уявимо трубу під насипом не більш 0,5 м, як безкінечно довгу тонкостінну циліндричну оболонку, що навантажена колесами двох проїжджаючих автомобілів по двох смугах руху, оскільки розглядається дорога III категорії, згідно [5]. На рис. 2 зображені схеми навантаження, що діють на існуючих дорогах АК-15, НК-100. Величина навантаження на задню вісь (більше навантаження), згідно [6] для АК-15 становить 147,15 кН, НК-100 – 245 кН, на колесо АК-15 – 73,575 кН, НК-100 – 122,5 кН.

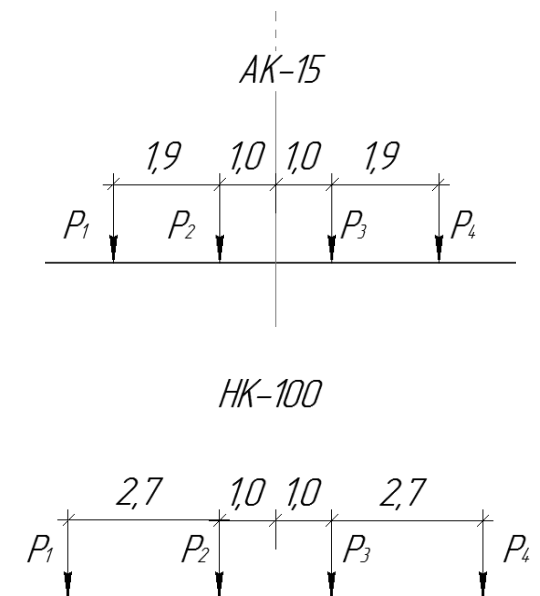


Рисунок 2 – Розподіл навантаження для АК-15 та НК-100

До розгляду приймаємо труби найбільш поширеного діаметру 1,00; 1,25; 1,5 м.

Для правої половини труби, враховуючи симетрію навантаження, маємо такі граничні умови [7]:

При $x=0$ $\frac{dw}{dx} = 0$; при $x=0$ $Q_0 = -\frac{P}{2}$. З цих умов, на підставі рівняння визначається згинальний момент M_x в початковому перерізі:

$$M_0 = -\frac{Q_0}{2\beta} = \frac{P}{4\beta}$$

Вирази для w , M_x відповідно до формул (2.46) – (2.50) та відповідно до [8] мають вигляд:

$$w = \frac{Pr^2\beta}{2Eh} e^{-|\beta x|} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (32)$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta} e^{-|\beta x|} (\sin \beta x - \cos \beta x) \quad (33)$$

Епюри w, M_x побудовані згідно принципу незалежності дії сил. Значення координат розраховано через проміжок кожні 0,05 м за допомогою MS Excel та визначено, що із збільшенням діаметру труби збільшується величина вигину.

Щоб зробити висновок чи витримає залізобетонна конструкція труби навантаження від автотранспорту розраховано нормальне навантаження для кожного діаметру від навантажень АК-15 та НК-100 за формулою відомою з курсу опору матеріалів [9]:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{w_t}, \quad (34)$$

Результати занесемо у таблицю 2.1. Враховуючи, що у 1960-х роках використовувався бетон класу В20–В22,5 [10], з міцністю на стиск 105,00 та 120,00, то труби діаметром 1,00 м та 1,25 м підлягають негайному ремонту [11]. Труби діаметром 1,00 м та 1,25 м не витримують навантаження за розрахунковим моментом. Усе це підтверджують натурні обстеження, з яких видно, що найбільша кількість труб у незадовільному стані саме діаметром 1,00 м та 1,25 м.

Таблиця 1–Результати розрахунку на міцність за максимальним згинаючим моментом

| Навантаження | Діаметр | M_{max} , кНм | σ_{max} , МПа | $M_{розр}$, кНм |
|--------------|---------|-----------------|----------------------|------------------|
| АК-15 | 1,00 м | 4,288 | 154,11 | 3,85 |
| | 1,25 м | 4,798 | 107,704 | 6,02 |
| | 1,5 м | 5,25 | 80,526 | 8,66 |
| НК-100 | 1,00 м | 5,253 | 188,96 | 4,72 |
| | 1,25 м | 5,787 | 129,91 | 5,37 |
| | 1,5 м | 6,43 | 98,63 | 10,61 |

Прогнозування на основі побудованої моделі можливо тільки в тому випадку, якщо модель адекватна об'єкту-оригіналу. Найкращим засобом перевірки адекватності моделі є порівняння прогнозних і фактичних значень, але в цьому випадку необхідно дочекатись прогнозного періоду. На етапі прогнозування оцінити надійність моделі можна за допомоги статичних показників [12].

Існує декілька показників, які добре характеризують точність побудованої моделі. Один з них MAPE – середня відносна похибка (mean absolute percent error). Сутність показника видно з назви. Середня відносна похибка показує, на скільки відсотків в середньому теоретичні рівні (розраховані за допомоги моделі) відрізняються від фактичних рівнів ряду [13].

$$MAPE = \frac{\sum \frac{|\hat{Y}_i - Y_i|}{Y_i}}{n} \cdot 100 \quad (35)$$

де n – число рівнів ряду;

Y_i – i -тий рівень ряду;

\hat{Y}_i – i -тий теоретичний рівень ряду.

Для розрахунку теоретичних рівнів ряду підставлено значення діаметрів у рівняння тренду, розраховане у MS Office Excel, результати внесено у табл. 2.2. Рівняння тренду має наступний вигляд для навантаження АК-15:

$$y = 2,369 \ln(d) + 4,282 \quad (36)$$

для навантаження НК-100:

$$y = 2,899 \ln(d) + 5,246 \quad (37)$$

Висновки. Отже, ми отримали значення MAPE=0,702% для схеми із навантаженням АК-15, та MAPE=0,742% для навантаження НК-100. Це говорить про те, що теоретичні рівні (розраховані за моделлю) в середньому відхиляються від фактичних на 0.7%. Згідно вимог [3] максимальний відсоток

похибки розрахунків для оболонок становить 5%, отже можна зробити висновок, що модель є якісною [14].

Таблиця 2 – Розрахунок середньої відносної похибки

| Діаметр (навантаження) | Момент | \hat{Y}_i | $\hat{Y}_i - Y_i$ | $\frac{\hat{Y}_i - Y_i}{Y_i}$ | $\left \frac{\hat{Y}_i - Y_i}{Y_i} \right $ |
|---------------------------|--------|-------------|-------------------|-------------------------------|--|
| 1,00 (АК-15) | 4,288 | 4,282 | -0,006 | -0,006 | 0,006 |
| 1,25 (АК-15) | 4,798 | 4,810627 | 0,012627 | 0,0101 | 0,0101 |
| 1,5 (АК-15) | 5,25 | 5,242547 | -0,00745 | -0,00497 | 0,00497 |
| <i>MAPE</i> | | | | | 0,702% |
| 1,00 (НК-15) | 5,253 | 5,246 | -0,007 | -0,007 | 0,007 |
| 1,25 (НК-15) | 5,878 | 5,8929 | 0,0149 | 0,01192 | 0,00954 |
| 1,5 (НК-15) | 6,43 | 6,4214 | -0,0086 | -0,00573 | 0,00573 |
| <i>MAPE</i> | | | | | 0,742% |

Література:

1. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости теории оболочек, - М.: Наука, 1987. – 288 с.
2. Водопропускные трубы под насыпями / Под ред. О. А. Янковского – М.: Транспорт, 1982 – 232 с.
3. Саргасян А. Е., Демченко А. Т., Дворянчиков Н. В., Джинчвеланшвили Г. А. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: Учебник/Под. ред. А. Е. Саргасяна. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
4. ДБН В.1.2–15:2009 Мости та труби. Навантаження і впливи, - К.:Мінрегіобуд України., 2009.–276 с.
5. ДБН В.2.3–14:2006. Мости і труби. Правила проектування. – К.: Мінбуд України, 2006. – 367 с.
6. ДБН В.1.2–15:2009 Мости та труби. Навантаження і впливи, - К.:Мінрегіобуд України.,2009. –276 с.
7. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / кантор Б. Я.; Отв. ред. Подгорный А. Н.; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – К.: Наук. думка, 1990. – 136 с.
8. Гольденвезер А. Л. Теория упругих тонких оболочек, - М.: Стройиздат, 1953. – 544 с.
9. Соппротивление материалов: Учебник для вузов / Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г. С. – 4-е изд., перед. и доп. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1979. – 696 с.
10. ДБН В.2.3-22:2009 «Мости і труби. Правила проектування» Мінрегіонбуд України, К.,2009. –73 с.
11. Соппротивление материалов: ученик / М. Д. Поскребка. – Минск: Высш. шк., 2007. – 797 с.
12. Златопольский Д. М. 1700 заданий по MS Excel. / Д. М. Златопольский – СПб.: БВХ, 2003. – 544 с.
13. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. □ М.: Финансы и статистика, 1981. – 263 с.
14. Сиденко В.М. Грушко И.М. Основы научных исследований. Х.: Виш. шк. – 1977. – 200 с.