УДК 625.7/.8

Савенко В.Я., д-р техн. наук, **Славінська О.С.,** д-р техн. наук,
Козарчук І.А.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ В ЗОНАХ РОЗГАЛУЖЕННЯ РІЧКОВОГО ПОТОКУ

Анотація. В статті проаналізовано основні моделі гідродинаміки річкових потоків. Розглянута двовимірна модель, і зроблено висновок про доцільність її застосування на практиці. Досліджується метод розрахунку вторинних течії поперечної циркуляції на основі двовимірної моделі руху рідини. Пропонується використовувати $k-\varepsilon$ модель для замикання рівнянь двовимірної моделі.

Ключові слова: математична модель, турбулентність, річковий потік, мостовий перехід.

Аннотация. В статье проанализированы основные модели гидродинамики речных потоков. Рассмотрена двумерная модель, и сделан вывод о целесообразности ее использования на практике. Исследуется метод расчета вторичных течения поперечной циркуляции на основе двумерной модели движения жидкости. Предлагается использовать $k-\varepsilon$ модель для замыкания уравнений двумерной модели.

Ключевые слова: математическая модель, турбулентность, речной поток, мостовой переход.

Annotation. The basic models of hydrodynamics of river streams are analyzed in the article. A two-dimensional model is considered, and conclusion about reasonability of its practical application is drawn. The calculation method of secondary flows of transversal circulation is researched on the basis of two-

dimensional model of fluid motion. It is suggested to use $k - \varepsilon$ model to closure the equalizations of two-dimensional model.

Key words: mathematical model, turbulence, river stream, bridge crossing.

Постановка проблеми

Сучасний рівень математичного моделювання течії безнапірних потоків визначається рівнем аналізу механізму турбулентного переносу. Незважаючи на великий досвід, накопичений в цій галузі, залишається ще чимало не вивчених до кінця питань. Їх дослідження ускладнюється тим, що досі не сформульована загальноприйнята замкнута система рівнянь турбулентного руху. Однак значний прогрес в сфері комп'ютерної техніки дав новий поштовх численному моделюванню турбулентності в задачах гідромеханіки і викликав її широке впровадження в практику інженерного проектування.

Математична модель руху річкового потоку дає змогу визначити його гідродинамічне поле швидкостей і тисків. А встановивши розподіл швидкостей по живому перерізу потоку, можна визначити розмив і розподіл витрати при розгалуженні потоку (наприклад, на мостових переходах з груповими отворами).

Основою для розробки математичної моделі руху річкового потоку в зоні впливу мостового переходу повинні бути рівняння динаміки реальної рідини в «напруженнях» або, що те ж саме, рівняння Нав'є-Стокса. Однак існуючі аналітичні і чисельні методи вирішення цих рівнянь розроблені лише для найпростіших задач, які мають дуже обмежене практичне застосування, – для ламінарного руху рідини [12].

Проте течія в зоні впливу мостового переходу – це випадок турбулентного режиму руху рідини, який характеризується тим, що при заданих граничних умовах швидкості і тиски в потоці є не визначеними, а випадковими функціями координат і часу. Визначеними функціями є тільки математичні сподівання. Випадкові функції, які виражають миттєві швидкості і тиски, а також їх математичні сподівання (які зазвичай називаються осередненими швидкостями і тисками) неможливо знайти з рівнянь Нав'є-Стокса за сучасних методів вирішення цих рівнянь [4, 6].

Система рівнянь турбулентного руху, які описують гідродинамічні поля швидкостей і тисків у водотоках, є незамкнутою. Тому її інтегрування викликає значні труднощі, пов'язані з нелінійністю рівнянь руху, а також складністю апроксимації в кінцевих різницях на досить дрібній сітці з великою кількістю вузлів. Тому для вирішення прикладних задач гідродинаміки використовують наближені математичні моделі течій, в яких враховують тільки головні фактори, а другорядними нехтують [12]. Прикладом такої наближеної моделі є двовимірна модель.

Таким чином, **мета роботи** полягає в розробціматематичної моделі течії в зоні розгалуження річкового потоку.

Аналіз досліджень і публікацій. В результаті поділу і злиття потоків різко змінюється гідродинамічна структура і транспортуюча здатність потоків, яка проявляється в: помітному викривленні планових струменів; утворенні значних (по відношенню до планових розмірів взаємодіючих потоків) рециркуляційних зон; появі значних швидкостей вторинних течій поперечної циркуляції; трансформації епюр розподілу швидкостей як по глибині, так і по ширині потоку; наявності відривних течій аперіодичного характеру, що обумовлюють істотне підвищення пульсаційних складових швидкостей; зміні транспортуючої здатності потоків, що призводить до виникнення розмивів і відкладень біля берегів.

Потік, що входить у відвід (відвідний потік), зазнає сильного стиснення. При прямолінійних стінках основного русла і відведення біля верхової стінки відвідного русла утворюється область завихрень (водоверті). Якщо витрата, що відділяється, велика, то розширення потоку в основному руслі часто супроводжується утворенням другої зони завихрень біля стінки основного русла, протилежної до входу у відвідне русло (рис. 1).

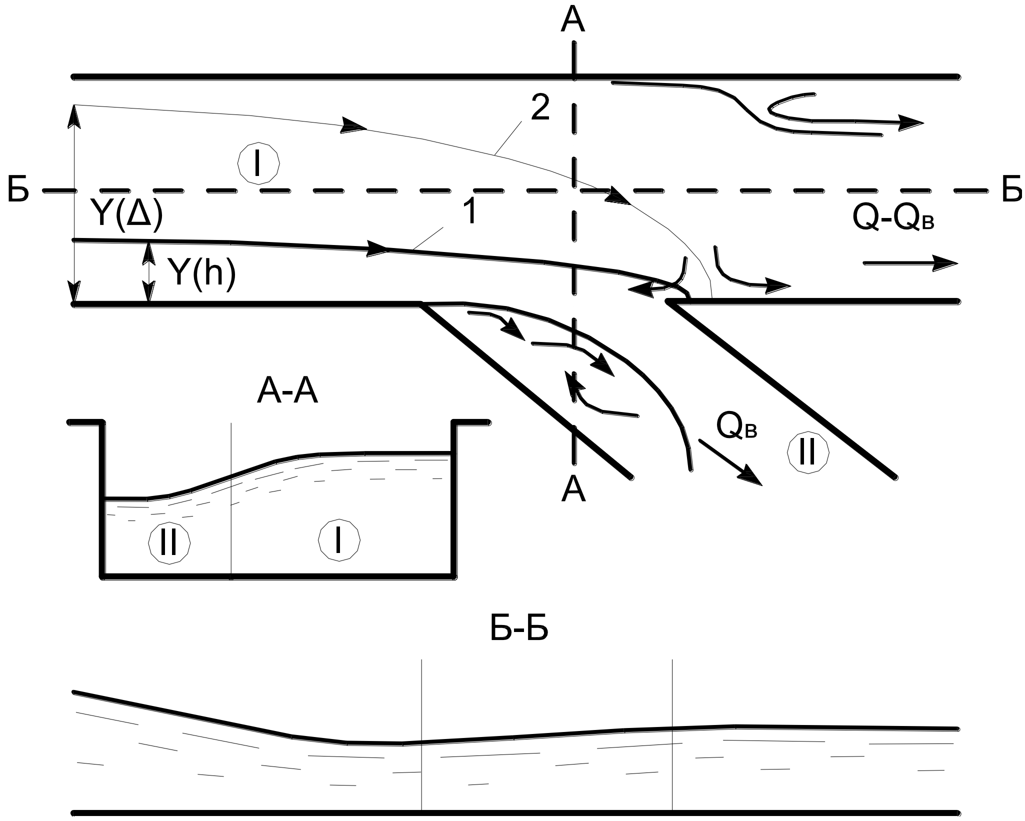

Рисунок 1 – Схема поділу відкритого потоку

Дослідження проблем гідродинаміки ґрунтується на використанні рівнянь руху, енергії, нерозривності і переносу рідкого середовища. Ці рівняння виражають фундаментальні закони механіки і встановлюють співвідношення між кінематичними і динамічними характеристиками течії рідини та її фізичними властивостями.

Рівняння руху рідини відображують один з основних законів механіки – другий закон Ньютона, згідно з яким маса, помножена на прискорення, дорівнює сумі всіх сил – об'ємних (масових) і поверхневих, – які діють на цю масу.

Прискорення маси рідини в свою чергу складається з локального прискорення $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ (обумовленого зміною швидкості в часі у фіксованій точці простору) і трьох складових конвективного прискорення $\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial j}$

(обумовленого зміною швидкості при переході від однієї точки простору до іншої).

До об'ємних сил належать сили, які діють на весь виділений об’єм рідини, наприклад сила тяжіння.

До поверхневих сил належать сили нормальногоτ_{ii} і дотичного τ_{ij} $(i \neq j)$ напружень. Рівнодійна поверхневих сил, віднесена до одиниці об’єму, дорівнює $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial j}$.

Враховуючи вище сказане, другий закон Ньютона можна представити у вигляді:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_i}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_i}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_i}{\partial z}\right) = X_i - \frac{\partial p}{\partial i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}\right), i = x, y, z. \quad (1)$$

Вираз (1) є рівняннями гідродинаміки нестискуваної рідини, які також називаються рівняннями Нав’є-Стокса.

Для однорідної рідини закон збереження маси виражається рівнянням нерозривності (суцільності) рідкого середовища. Згідно з цим законом зміна маси в її елементарному об’ємі, зумовлена зміною густини рідини і перенесенням її через границі виділеного об’єму, повинна дорівнювати нулю.

Як зазначалося вище, швидкості і тиски неможливо знайти з рівнянь Нав’є-Стокса [4, 6, 15]. Але спроби створення суто статистичної теорії турбулентності, яка б не спиралася на рівняння Нав’є-Стокса, не призвели до суттєвих результатів [8].

Однак вирішення гідродинамічних задач пов’язане не тільки з подоланням математичних труднощів, а, головним чином, з проблемою турбулентності. Рух рідини в реальних водотоках є турбулентним. Такий рух характеризується безладною і безперервною пульсацією швидкостей і тисків.

Тому найбільш перспективним шляхом вирішення даної проблеми є використання диференційних рівнянь осередненого руху, які мають практичне застосування. Ці рівняння отримані Рейнольдсом з рівнянь Нав'є-Стокса на основі прийнятого ним припущення, що дійсний (актуальний) рух, незважаючи його нерегулярний і випадковий характер, все ж описується цими рівняннями. Для виведення рівнянь осередненого турбулентного руху Рейнольдс запропонував замінити актуальні швидкості V_i і тиски p на осереднені $\bar{V}_i, \bar{p}$ і пульсаційні V'_i, p'.

При виведенні рівнянь турбулентний рух розглядається як квазістаціонарний, тобто в результаті осереднення, проведеного в різні моменти часу, отримується одні і ті ж значення осередненої величини.

Рівняння Рейнольдса відрізняється від рівнянь Нав'є-Стокса наявністю додаткового тензора турбулентних напружень. Фізична суть компонентів тензора полягає в тому, що вони є компонентами осередненого переносу кількості руху пульсаційного руху (імпульсу) пульсаційними швидкостями. Динамічний ефект цих складових проявляється у вигляді дотичних $\tau_{ij} = -\rho\bar{V}_i'\bar{V}_j'$ і нормальних $\tau_{ii} = -\rho\bar{V}_i'^2$ турбулентних напружень. Експерименти показують, що турбулентні напруження у всій товщі турбулентного потоку, за виключенням області в'язкого підшару, яка безпосередньо прилягає до твердих границь потоку, значно переважають в'язкі напруження і тому останніми в рівняннях Рейнольдса зазвичай нехтують, якщо не розглядати тонкий в'язкий підшар течії біля твердих границь [11, 12, 13, 15].

Рівняння Рейнольдса в скалярній формі в проекціях на осі декартових координат з урахуванням нехтування в'язкими напруженнями мають наступний вигляд:

$$\rho\frac{d\bar{V}_j}{dt} + \rho\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\left(\overline{V_i V_j}\right)}{\partial j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial j} - \rho\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\left(\bar{V}_i'\bar{V}_j'\right)}{\partial j} + \rho X_i; \;\; i = x, y, z; \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial j} = 0 \qquad (3)$$

Така система рівнянь є незамкнутою, внаслідок чого її інтегрування викликає значні труднощі. Тому для вирішення прикладних задач використовують наближені математичні моделі, в яких враховують тільки головні фактори (наприклад, двовимірна модель).

Рівняння двовимірної моделі також повинні виражати фундаментальні закони механіки з урахуванням наближень, обумовлених тим, що реальні тривимірні течії розглядаються в двовимірній плановій ідеалізації. Допущення при використанні планової ідеалізації тривимірних течії в руслах можна аналізувати, якщо рівняння двовимірної моделі отримати внаслідок осереднення по глибині загальних рівнянь тривимірного турбулентного руху рідини [15].

Задачі розрахунку гідродинамічних полів швидкостей і тисків в природних і штучно стиснутих руслах відносяться до задач теорії мілкої води, тобто коли глибина потоку значно менша за горизонтальні планові розміри. Це дозволяє розраховувати розподіл середніх за глибиною швидкостей в плані.

У зв’язку з цим авторами [11, 12, 13, 15] пропонується виведення рівнянь двовимірної моделі гідравліки з рівнянь осередненого тривимірного турбулентного руху в декартових координатах. Рівняння двовимірної моделі при цьому отримуються шляхом інтегрування тривимірних рівнянь (2), (3) по вертикалі від відмітки дна до вільної поверхні, тобто по глибині потоку.

Під час інтегрування приймаються наступні припущення:

- рух приймається усталеним;
- нехтують складовими, які враховують вклад вторинних течій поперечної циркуляції;
- проекція об’ємної сили на вертикальну вісь z дорівнює $X_z = -g$, а на горизонтальні осі x та $y X_x = X_y = 0$;
- при оцінці порядку складових нехтують складовими вищого порядку малості порівняно з основними складовими;

- значення тиску на вільній поверхні потоку P_H приймається постійним, тобто не розглядаються бароклінні течії;

- дно приймається таким, що не розмивається;

- при інтегруванні нелінійних конвективних складових нерівномірність розподілу швидкостей по вертикалі враховується за допомогою коефіцієнта α.

Таким чином після інтегрування загальні рівняння руху двовимірної моделі матимуть вигляд:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + \alpha_h\left(\frac{\partial U_x^2}{\partial x} + \frac{\partial U_x U_y}{\partial y}\right) = -g\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\langle \bar{V}_x'^2\rangle - \langle \bar{V}_z'^2\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial y}\langle \bar{V}_x'\bar{V}_y'\rangle + \frac{1}{\rho h}\left(\tau_{x_H} - \tau_{x_{z_0}}\right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} + \alpha_h\left(\frac{\partial U_x U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y^2}{\partial y}\right) = -g\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\langle \bar{V}_y'^2\rangle - \langle \bar{V}_z'^2\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial x}\langle \bar{V}_x'\bar{V}_y'\rangle + \frac{1}{\rho h}\left(\tau_{y_H} - \tau_{y_{z_0}}\right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U_x h}{\partial x} + \frac{\partial U_y h}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

При русі річкового потоку виникають вторинні течії поперечної циркуляції двох видів [4, 9, 12, 13, 14]: вторинні течії першого виду, обумовлені відцентровими силами на повороті русла, і вторинні течії другого виду, що виникають як у скривленому, так і в прямолінійному потоці, обумовлені нерівномірністю розподілу турбулентних напружень по живому перерізу русла, а саме нестійкістю основного осередненого руху потоку. Перший вид циркуляцій виникає не тільки на ділянках природних заокруглень потоку, а й у штучно стиснутих руслах, біля голови струмененапрямних дамб, а другий – при різнорідній шорсткості і при різких змінах форми русла в поперечному перерізі. Роль вторинних течій у формуванні русла, перенесенні наносів в природних і штучно стиснутих руслах досить суттєва, що підтверджується теоретичними і експериментальними дослідженнями [1, 2, 3, 5, 7, 16, 17]. Ці течії також здійснюють поперечне перенесення імпульсу в плані і при інтенсивній поперечній циркуляції, яка відбувається в зоні впливу мостових переходів та інших гідротехнічних об'єктів, цей ефект необхідно враховувати при вирішенні двовимірної моделі [12].

При розрахунку поперечної циркуляції в природних і штучно стиснутих руслах необхідно брати до уваги, що кривизна потоку в плані непостійна і змінює свій знак. Тобто буде відбуватися накладення поперечної циркуляції, яка «надходить» з вище розташованої ділянки, на поперечну циркуляцію, яка виникає на ділянці, що розглядається. В роботі [15] запропоновано математичний опис механізму поперечної циркуляції, який враховує «передісторію» осередненого руху в руслі, в тому числі і поперечну циркуляцію вище за течією.

Для визначення вкладу поперечної циркуляції [11, 12] при інтегруванні по глибині нелінійних складових рівнянь Рейнольдса виду $\frac{\partial}{\partial i}\overline{V_\iota V_J}$ в локальній поперечній швидкості виділяють складові вторинних течії поперечної циркуляції u_y та u_z, тобто $\overline{V_y}$ і $\overline{V_z}$ представлені у вигляді:

$$\overline{V_y} = U_y + u_y; \quad \overline{V_z} = u_z \tag{7}$$

При інтегруванні по глибині з виконанням умов:

$$\langle u_y \rangle \equiv 0; \quad u_z\big|_{z=H} = u_z\big|_{z=z_0} = 0 \tag{8}$$

складові виду $\frac{\partial}{\partial z}\overline{V_\iota V_z}$ $(i = x, y)$ перетворюються на нуль.

Отже, рівняння двовимірної моделі з урахуванням впливу поперечної циркуляції:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + \alpha_h \left(\frac{\partial U_x^2}{\partial x} + \frac{\partial U_x U_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \langle \bar{V}_x u_y \rangle =$$

$$= -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\langle \bar{V}_x'^2 \rangle - \langle \bar{V}_z'^2 \rangle) - \frac{\partial}{\partial y} \langle \bar{V}_x' \bar{V}_y' \rangle$$

$$+ \frac{1}{\rho h} \left(\tau_{x_H} - \tau_{x_{z_0}} \right); \qquad (9)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} + \alpha_h \left(\frac{\partial U_x U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{V}_x u_y \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle u_y^2 \rangle =$$

$$= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\langle \bar{V}_y'^2 \rangle - \langle \bar{V}_z'^2 \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{V}_x' \bar{V}_y' \rangle$$

$$+ \frac{1}{\rho h} \left(\tau_{y_H} - \tau_{y_{z_0}} \right); \qquad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U_x h}{\partial x} + \frac{\partial U_y h}{\partial y} = 0. \qquad (11)$$

де $\frac{\partial}{\partial y} \langle \bar{V}_x u_y \rangle, \frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{V}_x u_y \rangle, \frac{\partial}{\partial y} \langle u_y^2 \rangle$ – складові, які враховують вплив поперечної циркуляції.

$\langle \bar{V}_x u_y \rangle$ характеризує конвективне перенесення імпульсу вторинними течіями, може бути представлений у вигляді:

$$\langle \bar{V}_x u_y \rangle = \frac{U_x}{h} \int_{z_0}^{H} u_y dz \quad \text{і} \quad \langle u_y^2 \rangle = \int_{z_0}^{H} u_y^2 dz \qquad (12)$$

При цьому також повинна виконуватися умова (8).

Система рівнянь двовимірної моделі (4)-(6) незамкнута, тобто в рівняннях руху присутні дотичні і нормальні турбулентні напруження. Наявність в рівняннях цих напружень призводить до необхідності апроксимації членів турбулентного перенесення за допомогою певної моделі турбулентності. Виділяється два основних методи описання моделей турбулентності: інтегральні і диференційні. Для відповідності моделі турбулентності рівнянням двовимірної моделі для замикання цієї системи необхідно використовувати моделі, які займають проміжне положення між вищеназваними двома моделями [12].

Згідно з даними численних досліджень [10, 12, 18, 19] для обчислення осереднених по глибині величин доцільно використовувати перетворену $k-\varepsilon$ модель. Використовуючи підхід, запропонований А. Растоджі та В. Роді [19], зміну осередненої за глибиною кінетичної енергії турбулентності і швидкості її дисипації можна описати наступними рівняннями перенесення:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t}+\bar{U}_x\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x}+\bar{U}_y\frac{\partial \tilde{k}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial y}\right)+P_{2d}-\tilde{\varepsilon}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t}+\bar{U}_x\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x}+\bar{U}_y\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y}\right)+c_{\varepsilon_1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}}P_{2d}-c_{\varepsilon_2}\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}. \tag{14}$$

Досить широко були апробовані алгебраїчні співвідношення для турбулентних напружень, отримані при використанні модельних апроксимацій на основі відповідних рівнянь перенесення других кореляційних моментів. Згідно із загальним підходом, з рівнянь для напружень Рейнольдса вилучається похідна за часом, спрощуються дифузійний, дисипативний члени і член кореляції пульсації. Внаслідок того, що впливом архімедових сил в даній задачі можна знехтувати, алгебраїчні співвідношення, які описують перенесення турбулентних напружень величини $\overline{V_x'V_y'}$, $\overline{V_x'V_x'}$, $\overline{V_y'V_y'}$, для випадку двовимірної ідеалізації можна привести до вигляду:

$$\langle\overline{V_x'V_y'}\rangle=\tilde{k}\left[\frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{xy}}{\tilde{\varepsilon}}\right)}{c_1+\frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}}-1}\right],$$

$$\langle \overline{V_x' V_x'} \rangle = \tilde{k} \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{xx}}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{2}{3}\frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}}\right)}{c_1 + \frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}} - 1} \right],$$

$$\langle \overline{V_y' V_y'} \rangle = \tilde{k} \left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{yy}}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{2}{3}\frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}}\right)}{c_1 + \frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}} - 1} \right]. \qquad (15)$$

де $\tilde{k}$ – турбулентна кінетична енергія;

$\tilde{\varepsilon}$ – дисипація кінетичної енергії;

γ – параметр релаксації;

P_i – члени генерації турбулентності;

c_i – емпіричні константи.

Висновки

Існуючі методи вирішення рівнянь Нав'є-Стокса розроблені лише для найпростіших задач, які мають обмежене практичне застосування. Тому найбільш перспективним є використання диференційних рівнянь турбулентного осередненого руху – рівнянь Рейнольдса. Для широкого кола практичних задач доцільним є застосування двовимірної моделі руху річкового потоку, що враховує головні фактори, які впливають на формування поля швидкостей і тисків потоку. При розрахунку природних і штучно стиснутих русел необхідно також враховувати вплив вторинних течій поперечної циркуляції, оскільки вони відіграють важливу роль у формуванні русла і перенесенні наносів. Складність математичного моделювання течії при розгалуженні потоків полягає у врахуванні розподілу витрат і правильному призначенні граничних умов.

Література

1. Андреев О. В. Регулирование рек затапливаемыми сооружениями: Сообщение №11. – М.: Трансжелдориздат, 1950. – 20 с.

2. Болдаков Е. В. Переходы через водотоки. – М.: Транспорт, 1965. – 422 с.
3. Караушев А. В. Речная гидравлика. – Л.: Гидрометеоиздат, 1969. – 416 с.
4. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973. – 280 с.
5. Курганович А. А., Товбич О. В. Поперечная циркуляция и деформация русла у струенаправляющих дамб мостовых переходов // Гидротехн.стр-во., 1990. - №5. – С. 45-46.
6. Ламли Дж. Модели второго порядка для турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, 1984. – С. 7-34.
7. Латышенков А.М. Струенаправляющие дамбы. – М.: ВНИИВОДГЕО, 1956. – 196 с.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
9. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – М.: ИЛ, 1951. – 576 с.
10. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, 1984. – С. 227-322.
11. Рутковская И. А. Двумерная математическая модель и метод расчета течения жидкости в узлах разветвления открытых потоков. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – К.: 2000.
12. Савенко В. Я. Математичні моделі і методи розрахунку квазітрьохмірних безнапірних потоків. – К.: Техніка, 1995. – 188 с. Мова рос.
13. Савенко В. Я, Славинская Е. С. Моделирование процессов развития внутренних течений с учетом анизотропии открытых турбулентных потоков. – К.: НТУ, 2004. – 176 с.
14. Фидман Б. А. Гидродинамика речных течений // Динамика и термика речных потоков. – М.: Наука, 1972. – С. 5-15.
15. Шеренков И. А. Прикладные плановые задачи гидравлики спокойных потоков. – М. Энергия, 1978. – 240 с.
16. Fisher H. B. Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open channel flow // Ann.Rev.Fluid Mech., 1973 – Vol.5. – P. 59-78.
17. Fukuoka S., Sayre W. W. Longitudinal dispersion in sinuous channels // J.Hydr.Div.Proc.ASCE, 1973. – Nr, HY1. – P. 195-217.
18. Li Fu-tian, Ni Hao-ging. Application and development of turbulence model for engineering practice // Journal of hydraulic engineering, 2001. – N5. – P. 22-31.
19. Rastogi A. K., Rodi W. Predictions of heat and mass transfer in open channels // J.Hydr.Div., ASCE, 1978. – №HY3. – P. 397-420.