

## МЕТОД АНАЛОГІЙ ПРИ РОЗРАХУНКУ ШАРУВАТИХ ПЛИТ

**Анотація.** В статті запропонована нова методика визначення уточнених компонентів напружено-деформованого стану (НДС) шаруватих композитних плит. Уточнення виконано за рахунок врахування деформацій поперечного зсуву, що, на відміну від класичної теорії, дозволяє врахувати викривлення нормалі. Методика побудована на застосуванні математичної аналогії між рівнянням зсуву та класичним рівнянням згину тонкої плити.

**Ключові слова:** математична аналогія, поперечний зсув, композитні плити, напружено-деформований стан.

**Аннотация.** В статье предложена новая методика определения уточненных компонентов напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистых плит. Уточнение выполнено за счет учета деформаций поперечного сдвига, что, в отличие от классической теории, позволяет учитывать искривление нормали. Предложенная методика расчета построена на использовании математической аналогии между уравнением сдвига и классическим уравнением изгиба тонкой пластины.

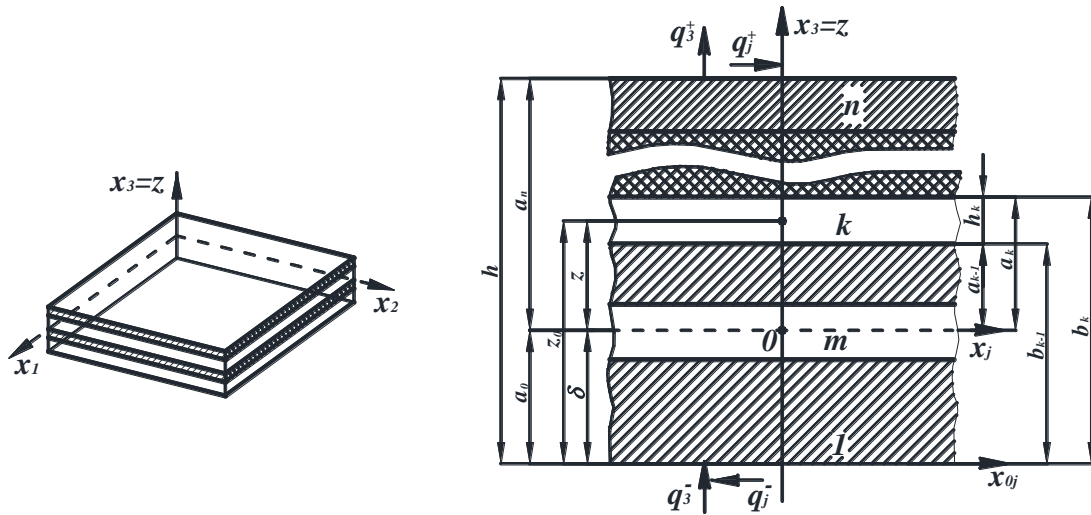
**Ключевые слова:** математическая аналогия, поперечный сдвиг, композитные плиты, напряженно-деформированное состояние.

**Abstract.** In this article it is proposed a new method of finding specified stress-strain state components of layered composite slabs. The methodic is based on using mathematical analogy of shear equation and that of classical bending of the thin slab.

**Keywords:** mathematical analogy, transverse shear, composite slabs, stress-strain state.

Шаруваті плити мають характерну особливість – низьку трансверсальну жорсткість при поперечному зсуві. Нормаль в таких конструкціях суттєво викривляється, причому в різній мірі для різних шарів. Для виведення рівнянь теорії шаруватих плит всі шари приймаються трансверсально-ізотропними, а

також вважається, що умови контакту шарів забезпечують їх сумісну роботу без проковзування та відриву.



**Рисунок 1** – Конструкція шаруватої плити

Положення поверхні приведення (рис.1) обрано, виходячи з умови  $B_1 = 0$ , тобто

$$B_1 = \int_{a_0}^{a_n} E_{0k} z dz = \sum_{k=1}^n E_{0k} \int_{a_{k-1}}^{a_k} z dz = 0. \quad (1)$$

$$\text{Враховано, що } z = z_0 - \delta, \quad a_k = b_k - \delta, \quad a_{k-1} = b_{k-1} - \delta, \quad (2)$$

звідки отримується координата поверхні приведення

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^n E_{0k} \int_{b_{k-1}}^{b_k} z_0 dz_0}{\sum_{k=1}^n E_{0k} \int_{b_{k-1}}^{b_k} dz_0}. \quad (3)$$

Для виведення спрощеного рівняння для шаруватих пластин використані наступні припущення:

- відсутність тангенційних навантажень  $q_j^\pm = 0$ ;
- відсутність тангенційних переміщень на рівні поверхні приведення дорівнюють нулю  $u_j = 0$ ;
- для всіх шарів приймається приведений модуль пружності

$$E_{np} = 12D_{11}(1 - \nu_{np}^2)/H^3 \quad (4)$$

та приведений коефіцієнт Пуассона

$$\nu_{np} = B_\nu/B, \quad (5)$$

$$\text{де } B_v = \sum_{k=1}^n E_{0k} \int_{a_{k-1}}^{a_k} v_k dz = \int_{a_0}^{a_n} E_{0k} v_k dz = 0.$$

Отже, при таких припущеннях, отримано систему рівнянь рівноваги шаруватих плит в переміщеннях

$$\begin{cases} D_{21}\Delta^2 w + D_{22}\Delta^2 \chi - D_{21}\Delta\chi = 0; \\ D_{11}\Delta^2 w + D_{12}\Delta^2 \chi = q, \end{cases} \quad (6)$$

де  $q = q_3 = q_3^+ + q_3^-$  – нормальне навантаження на лицьових поверхнях плити;

$D_{11}$  – жорсткість, що враховує згин;

$D_{22}$  – жорсткість, що враховує зсув;

$D_{12} = D_{21}$  – жорсткість взаємовпливу згину та зсуву.

Система (6) має загальний восьмий порядок. На кожному краю повинні бути виконані наступні граничні умови. Для краю  $x_1 = const$  маємо (рис.1):

$$\text{шарнірне обпирання} - w = \chi = 0; M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(2)} = 0; \quad (7)$$

$$\text{жорстке закріплення} - w = \chi = 0; w_{,1} = \chi_{,1} = 0; \quad (8)$$

$$\text{вільний край} - M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(2)} = 0; M_{11,1}^{(1)} + 2M_{12,2}^{(1)} = 0; M_{11,1}^{(2)} + 2M_{12,2}^{(2)} - Q_1^{(2)} = 0. \quad (9)$$

Для подальших перетворень рівнянь системи (6) використано наступну наближену залежність між характеристиками жорсткості

$$D_{22}/D_{21} \approx D_{21}/D_{11}, \quad (10)$$

що дозволяє представити систему рівнянь (6) у вигляді

$$\begin{cases} D_{11}\Delta\chi = q; \\ D_{11}\Delta^2 w + D_{12}\Delta^2 \chi = q. \end{cases} \quad (11)$$

В розгорнутій формі система (11) має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} = \frac{q}{D_{11}}; \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{D_{12}}{D_{11}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \left( \frac{\partial \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{q}{D_{11}}. \end{cases} \quad (12)$$

Якщо прийняти  $G_k' = \infty$  і, як наслідок,  $D_{12} = D_{21} = 0$ , то друге рівняння системи (12) буде диференціальним рівнянням згину тонкої плити, що засновано на гіпотезі плоских перерізів:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = \frac{q}{D_{11}}. \quad (13)$$

Згідно перетворенню Marcus Н., викладеному С.П. Тимошенком та Войновські-Кригером, диференційне рівняння четвертого порядку (13) можливо замінити системою двох рівнянь другого порядку, а саме

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} = -q; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = -\frac{M}{D_{11}}, \end{cases} \quad (14)$$

де  $M$  – узагальнений вираз для розподілених згинальних моментів.

$$M = (M_{11} + M_{22}) / (1 + \nu_{np}) = (M_{x1} + M_{x2}) / (1 + \nu_{np}). \quad (15)$$

Прослідковується математична аналогія між першим рівнянням системи (14) та першим рівнянням системи (12).

Для реалізації цієї аналогії вводиться поняття про фіктивне навантаження

$$q_\phi = -q / D_{11}, \quad (16)$$

з урахуванням якого перше рівняння системи (14) можливо представити у вигляді, аналогічному першому рівнянню системи (12).

$$M^{\phi}_{,11} + M^{\phi}_{,22} = q_\phi, \quad (17)$$

де  $M^{\phi}(x_1, x_2) = (M^{\phi}_{x1} + M^{\phi}_{x2}) / (1 + \nu_{np})$  – узагальнений фіктивний момент, що є аналогом функції зсуву, тотожний при шарнірному закріпленні та защемленні по контуру плити.

У результаті розв'язку рівняння (17) знаходиться значення фіктивного моменту.

Друге рівняння системи (11) можливо представити у наступному вигляді:

$$D_{11} \Delta^2 (w_{yточ} + \chi(D_{12} / D_{11})) = q. \quad (18)$$

Якщо ввести функцію узагальнених лінійних переміщень

$$\Phi = w_{yточ} + \chi(D_{12} / D_{11}), \quad (19)$$

система (11) приймає вигляд

$$\begin{cases} D_{11} \Delta \chi = q; \\ D_{11} \Delta^2 \Phi = q, \end{cases} \quad (20)$$

де  $\Phi$  – аналог прогину, знайденого на основі рівнянь класичної теорії при наступних граничних умовах:

$$\text{шарнірне обпирання} - \Phi = \Phi_{,11} = \chi = 0; \quad (21)$$

$$\text{жорстке закріплення} - \Phi = \Phi_{,1} = \chi = 0 \quad (22)$$

$$\text{вільний край} - \Phi_{,11} + \nu \cdot \Phi_{,22} = 0; [\Phi_{,11} + (2 - \nu)\Phi_{,22}]_{,1} = 0; \chi_{,1} = 0. \quad (23)$$

З формули (19) визначається уточнений прогин

$$w_{\text{умоч}} = \Phi - \chi(D_{12}/D_{11}) = w_{\text{кл}} - \chi(D_{12}/D_{11}), \quad (24)$$

де  $w_{\text{кл}}$  – прогин, знайдений на основі рівнянь класичної теорії.

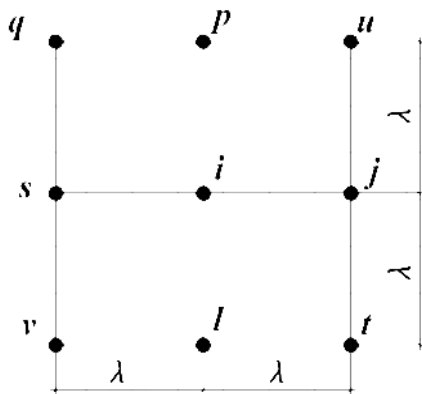
Для числової реалізації методу аналогій запропоновано визначати прогини  $w_{\text{кл}}$  та зусилля  $M_{x1}$  і  $M_{x2}$  у вузлах схеми з кроком  $\lambda$  (рис. 2).

Класичний прогин та згинальні моменти пропонується отримувати шляхом розв'язку задач МСЕ, зокрема, можливо використання обчислювальних комплексів SCAD, ЛИРА та інших. При цьому застосовуються скінченні елементи оболонки нульової кривизни.

Для знаходження характеристик жорсткості створено підпрограму в середовищі MathCAD як частину програми щодо знаходження уточненого прогину та напружень з врахуванням поперечного зсуву.

При моделюванні конструкції шаруватої плити з ребрами жорсткості формулюються умови контакту: на нижній поверхні плити з ребрами в точках контакту переміщення та кути повороту об'єднуються.

Компоненти тензору напружень визначаються через модулі пружності шарів та через похідні від знайдених функцій ( $w_{\text{ум}}$ ,  $\chi$ ) у вузлах розрахункової схеми.



$$\sigma_{11}^{(k)}(z) = E_{0k} [(\aleph_{11}^{(1)} + \nu_k \aleph_{22}^{(1)})z + (\aleph_{11}^{(2)} + \nu_k \aleph_{22}^{(2)})\psi_k(z)];$$

$$\sigma_{22}^{(k)}(z) = E_{0k} [(\aleph_{11}^{(2)} + \nu_k \aleph_{22}^{(2)})z + (\aleph_{11}^{(1)} + \nu_k \aleph_{22}^{(1)})\psi_k(z)];$$

$$\sigma_{12}^{(k)}(z) = \sigma_{21}^{(k)}(z) = E_{0k} (1 - \nu_k)(\aleph_{12}^{(1)}z + \aleph_{12}^{(2)}\psi_k(z));$$

$$\sigma_{j3}^{(k)} = \aleph_{j, f_{2k}}; \quad \sigma_{33}^{(k)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Похідні ( $\aleph$ ), що входять до формул (25), визначаються методом скінченних різниць – МСР (рис.2):

Рисунок 2 – Порядок нумерації

вузлів в околі характерної точки  $i$

$$\begin{aligned} \aleph_1 = \chi_{,1} &= \frac{\chi_j - \chi_s}{2\lambda}, & \aleph_2 = \chi_{,2} &= \frac{\chi_p - \chi_l}{2\lambda}, & \aleph_{11}^{(1)} = -w_{,11} &= -\frac{w_j - 2w_i + w_s}{\lambda^2}, \\ \aleph_{22}^{(1)} = -w_{,22} &= -\frac{w_p - 2w_i + w_l}{\lambda^2}, & \aleph_{11}^{(2)} = -\chi_{,11} &= -\frac{\chi_j - 2\chi_i + \chi_s}{\lambda^2}, & \aleph_{22}^{(2)} = -\chi_{,22} &= -\frac{\chi_p - 2\chi_i + \chi_l}{\lambda^2}, \\ \aleph_{12}^{(1)} = -w_{,12} &= -\frac{(w_u + w_v) - (w_q + w_t)}{4\lambda^2}, & \aleph_{12}^{(2)} = -\chi_{,12} &= -\frac{(\chi_u + \chi_v) - (\chi_q + \chi_t)}{4\lambda^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для обґрунтування достовірності запропонованої моделі деформування композитних плит на балочному ростверку та методу аналогій виконано розв'язок серії задач з порівнянням отриманих результатів з експериментальними даними, тривимірними розрахунками та з результатами інших нескорельованих методів.

У табл.1 наведено значення прогинів та напружень в центрі квадратної зі стороною  $a$  тришарової симетричної за будовою плити загальною товщиною  $H$  під нормальним синусоїдальним навантаженням при шарнірному обпиранні. Параметри шарів:  $E_1 = E_3 = 10^3 \cdot E_2$ ;  $h_2 = 8h_1$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$ , де 1, 3 – зовнішні шари, 2 – шар заповнювача. Шляхом порівняння результатів розв'язку на основі аналітичного підходу з відомим тривимірним розв'язком Л.Е.Брюккера дана оцінка впливу деформації зсуву відношеннями  $w_{max}/w_{max}^{кл}$  та  $\sigma_{max}/\sigma_{max}^{кл}$ . Різниця між класичним та некласичним розв'язком вказує на необхідність врахування деформації зсуву при визначенні прогинів та напружень в шаруватих плитах при зменшенні відносних розмірів ( $a/H$ ).

**Таблиця 1** – Тришарова плита під нормальним навантаженням

$\frac{a}{H}$	Прогини, $w_{max} E_1 / (10^4 q_0 H)$				Напруження, $\sigma_{max} / (10^2 q_0)$			
	Розв'язок Л.Е. Брюккера	Отриманий розв'язок	Класичний розв'язок	$\frac{w_{max}}{w_{max}^{кл}}$	Розв'язок Л.Е. Брюккера	Отриманий розв'язок	Класичний розв'язок	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max}^{кл}}$
40	35,23	35,23	14,70	2,40	7,33	7,34	6,47	1,13
20	5,96	5,96	0,92	6,50	2,47	2,47	1,62	1,52
10	1,26	1,24	0,06	20,67	1,21	1,21	0,40	3,03

У табл.2 наведено порівняння прогинів для вищенаведеної плити під тангенційним навантаженням  $q_1^+ = q_1 \cdot \cos(\pi \cdot x_1/a) \sin(\pi \cdot x_2/a)$  та при  $E_1 = E_3 = 10 \cdot E_2$  з просторовим розв'язком N.J. Pagano. Результати отримано в центрі плити.

**Таблиця 2** – Тришарова плита під тангенційним навантаженням

$\frac{a}{H}$	Прогин, $w_{\max} E_1 / (10^3 q_1 H)$			
	Розв'язок N.J. Pagano	Отриманий розв'язок	Класичний розв'язок	$\frac{w_{\max}}{w_{\max}^{\text{кл}}}$
10	0,08430	0,08385	0,08165	1,03
8	0,04391	0,04356	0,04180	1,04
5	0,01146	0,01130	0,01021	1,11

Виконано порівняння результатів розрахунку тришарових плит на основі аналітичного підходу з розв'язком задачі згину трансверсально-ізотропних багатошарових плит симетричної будови та експериментальними даними О.О. Рассказова. Розглянуті тришарові симетричні за будовою шарнірно обперті плити під нормальним розподіленням навантаженням інтенсивністю  $q$ . Розмір сторони плити складає  $a$ . Зовнішні шари товщиною  $h_1 = h_3 = 0,08$  см виконано з дуралюмінію з модулем пружності  $E_1 = E_3 = 7 \cdot 10^4$  МПа та модулем зсуву  $G'_k = 98$  МПа ( $k = 1, 2, 3$ ). Товщина заповнювача  $h_2$ , значення  $q$  та  $a$ , а також результати розрахунку та їх порівняння подано в табл.3. Прогини отримано в центрі плити.

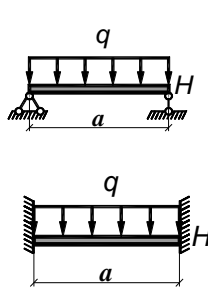
**Таблиця 3** – Тришарова трансверсально-ізотропна плита під нормальним навантаженням

$a, \text{см}$	$h_2, \text{см}$	$q, \text{МПа}$	Прогин $w, \text{см}$				
			Експеримент О.О. Рассказова	Отримані результати на основі аналітичного підходу	$\Delta, \%$	Розв'язок О.О. Рассказова	$\Delta, \%$
112,3	0,991	0,00507	0,912	0,936	3	0,909	3
	1,306	0,00380	0,427	0,424	0	0,414	2
96,6	0,968	0,04560	0,481	0,488	1	0,476	3
	1,272	0,00507	0,312	0,332	6	0,325	2
81,4	0,978	0,00507	0,285	0,275	4	0,270	2
	1,288		0,183	0,169	8	0,166	2
71,2	0,986	0,00507	0,165	0,163	1	0,160	2
	1,278	0,00406	0,089	0,083	7	0,082	1

У табл. 4 наведено порівняння результатів розрахунку серії тришарових квадратних симетричних по товщині однорідних ізотропних плит під рівномірно розподіленим нормальним навантаженням при шарнірному обпиранні (верхнє значення) та защемленні по контуру (нижнє значення). Результати в центрі плити отримано на основі трьох підходів: аналітичного за уточненою теорією, методом аналогій та МСЕ з використанням тривимірного СЕ за допомогою обчислювального комплексу SCAD.

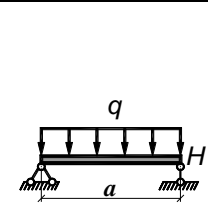
У табл. 5 для цих конструкцій при шарнірному обпиранні плити представлено компоненти тензору напружень: тангенційні  $\sigma_{11}^{(k)}$  в центрі плити при  $x_1 = x_2 = a/2$  (верхнє значення) та поперечні дотичні  $\sigma_{13}^{(k)}$  в крайовій зоні в точці  $x_1 = 0; x_2 = a/2$  (нижнє значення). Параметри шарів:  $h_2 = 8h_1; \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3; a/H = 8$ , де 1, 3 – зовнішні шари; 2 – шар заповнювача.

**Таблиця 4** – Тришарова плита при шарнірному обпиранні та защемленні по контуру

	Прогин, $w \cdot E_1 / q_0 \cdot H \cdot 10^2$						
	МСЕ**	Аналітичний розв'язок	$\Delta$ , %	Методом аналогій з вихідними даними, отриманими			
				На основі аналітичного розв'язку	$\Delta$ , %	На основі МСЕ*	$\Delta$ , %
	<u>1,9296</u>	<u>1,9632</u>	<u>1,7</u>	<u>1,9632</u>	<u>1,7</u>	<u>1,9640</u>	<u>2,0</u>
	0,70977	0,71261	0,4	0,71261	0,4	0,71324	0,5

**Примітка:** \* СЕ – оболонка нульової кривизни; \*\* СЕ – просторовий елемент.

**Таблиця 5** – Тришарова плита під нормальним навантаженням

	Напруження, $\sigma_{11}/q_0$ та $\sigma_{13}/q_0$				
	МСЕ** Розв'язок О.В. Марчука	Аналітичний розв'язок (уточнена теорія)	$\Delta$ , %	Методом аналогій з вихідними даними, отриманими	
				МСЕ*	$\Delta$ , %
	<u>35,871</u>	<u>35,093</u>	<u>2,2</u>	<u>34,993</u>	<u>2,5</u>
	2,9997	3,0902	3,0	3,1278	4,3

**Примітка:** \* СЕ – оболонка нульової кривизни; \*\* СЕ – просторовий елемент.



## Висновки

Розроблений метод аналогій для визначення напружено-деформованого стану композитних плит під дією різноманітних навантажень і при різних умовах закріплення на основі математичної аналогії між рівняннями згину та зсуву. Обґрунтовано достовірність методу шляхом порівняння результатів, отриманих на основі аналітичного розв'язку та методу аналогій, з експериментальними даними, результатами розв'язку інших авторів та з розрахунками тривимірних об'єктів МСЕ на основі об'ємних скінченних елементів.

## Література

1. Карпиловский В.С. Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер // М.: Издательство АСВ, 2004. – 592 с.
2. Піскунов В.Г. Конструювання та розрахунок нових типів мостових прогонових будов монтажних блоків / В.Г. Піскунов, В.С. Сіпетов, Б.В. Гриневецький, М.Г. Парубець, І.О. Кондрюкова, Р.В. Гриневецький // Київ. – Збірник наукових статей “Дороги і мости”. Випуск 7. Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна, 2007, С. 106 – 114.
3. Рассказов А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга // К. – Вища шк. Голов. изд-во. – 1986. – 192 с.
4. Рябов О.Ф. Розрахунок багатосарових оболонок / О.Ф. Рябов // К. – Будівельник, 1968. – 96 с.
5. Сахаров А.С. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем / А.С. Сахаров, А.Л. Козак, А.В. Гондлях, С.Л. Мельников // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К. – Будівельник, 1984. – № 44. – С. 13 – 16.