

Ткачук С.Г., д-р техн. наук, Матвеева К.Ю.

**ВИЗНАЧЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗМИВУ У ВИПАДКУ  
ПРОХОДЖЕННЯ ТРАСИ АВТОМОБІЛЬНОЇ ДОРОГИ У НИЖНЬОМУ  
Б'ЄФІ ГРЕБЛІ**

**Анотація.** У статті запропонована та обґрунтована математична модель для розрахунку загальних руслових деформацій при прориві греблі, показана аналітична реалізація запропонованої моделі та наведені результати її застосування.

**Ключові слова:** загальний розмив, математична модель, прорив греблі, хвиля прориву.

**Аннотация.** В статье предложена и обоснована математическая модель для расчёта общих русловых деформаций при прорыве гребли, показана аналитическая реализация предложенной модели и приведены результаты её использования.

**Ключевые слова:** общий размыв, математическая модель, прорыв дамбы, волна прорыва.

**Annotation.** This article proposes and substantiates mathematical model for calculating the total channel deformations in the breakout of rowing, shows an analytic realization of the proposed model and results of its use.

**Keywords:** total scour, mathematical model, the breakout of rowing, break wave.

**Вступ**

При руйнуванні гребель та спорожненні водосховищ формується хвиля прориву, яка має значну руйнівну силу. Рух великих мас води з високою швидкістю призводить до утворення значних розмивів, що викликає

необхідність виконання прогнозу руслових деформацій під мостом за умов руйнування і прориву греблі.

Потоки в річках з деформуючим руслом складаються з двох фаз: рідкої і твердої. Тому для їх математичного описання необхідно, як мінімум, чотири рівняння: для кожної фази рівняння нерозривності та руху. Для всіх без винятку математичних моделей руслових деформацій домінантним рівнянням є рівняння балансу наносів. З фізичної точки зору воно являє фундаментальний закон збереження речовини, який в руслових прогнозах втілюється в закон збереження загальної кількості наносів.

### Основна частина

Для русел з нерозмивними берегами рівняння балансу наносів можна записати в розгорнутому вигляді, який надає йому зручності в аналітичних перетвореннях, і тому набуло поширеного застосування в практиці інженерних прогнозів руслових деформацій. Незважаючи на те, що при його виведенні використано приклад стиснення ріки мостовим переходом, воно має загальний характер.

$$\frac{\partial G}{\partial l} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

де  $G$  — повна витрата наносів в живому перерізі;

$h$  — середня глибина живого перерізу;

$B$  — ширина русла між урізами.

Рівняння балансу наносів (1) придатне як для визначення руслових переформувань в природних умовах, так і прогнозів деформацій дна при будь-якому стисненні ріки гідротехнічними чи транспортними спорудами.

Динамічне рівняння для рухливих наносів представляється інтегральною залежністю, що пов'язує осереднену по ширині русла витрату наносів з гідравлічними характеристиками течії.

В залежності від співвідношення стоку води і наносів ріка вибирає той чи інший спосіб їх транспортування, що і визначає тип руслового процесу.

Сучасна гідроморфологічна теорія руслового процесу [5] виходить з того, що транспортування донних піщаних і піщано-гравелистих наносів відбувається не окремими крупинками, а їх скупченням — русловими

мезоформами, що являють собою скупчення наносів у вигляді пасм, боковиків, осередків. Їх характерні розміри співставні з глибиною русла і корелюють з розмірами крупномірільних когерентних вихрових структур руслового потоку. Переміщення наносних формувань у вигляді руслових мезоформ відбувається під дією осереднених швидкостей в природній області.

Формулу транспортуючої спроможності можна записати у наступному вигляді:

$$G = A \cdot B_p \cdot V^4, \quad (2)$$

в якому  $V$  — середня швидкість руслового потоку; функція  $A$  може визначатися наближено по таблиці 1.

**Таблиця 1** — Значення функції крупності наносів

Ґрунт	Різновид ґрунту	$d$ , мм	$A$
Пісок	Дрібний	0,05-0,25	$18 \cdot 10^{-4}$ - $7,2 \cdot 10^{-4}$
	Середній	0,25-1,0	$7,2 \cdot 10^{-4}$ - $3,4 \cdot 10^{-4}$
	Крупний	1,0-2,5	$3,4 \cdot 10^{-4}$ - $2,6 \cdot 10^{-4}$
Ґравій	Дрібний	2,5-5,0	$2,6 \cdot 10^{-4}$ - $2,0 \cdot 10^{-4}$

Рівняння нерозривності для водного потоку описує дотримання кожної миті в кожному живому перерізі залежності:

$$Q = B \cdot h \cdot V. \quad (3)$$

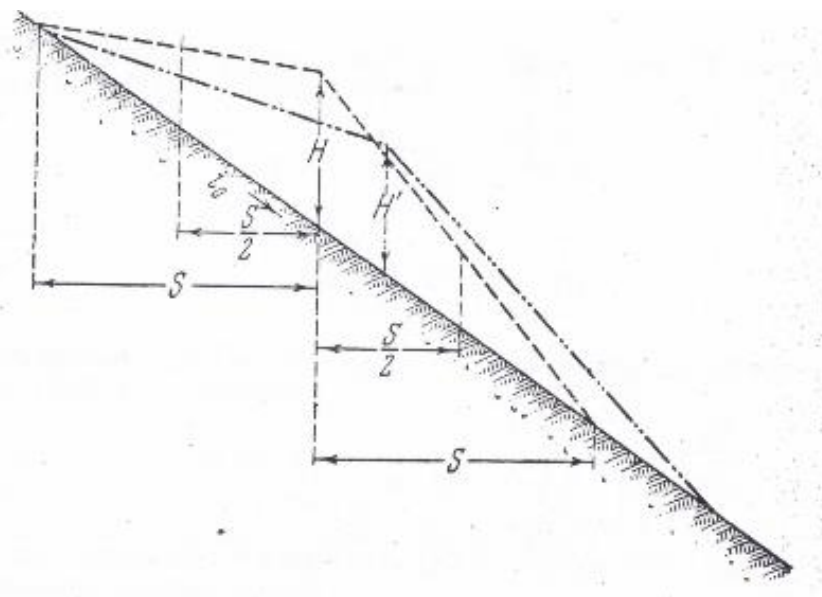
При цьому сама витрата води в загальному випадку може змінюватись як за часом, так і по довжині.

При руйнуванні греблі виникає хвиля прориву, що рухається за законами неусталеного руху. Просування по руслам річок різноманітних хвиль завжди супроводжується явищами їх трансформації, які створюють тенденцію до зменшення максимальної витрати води по довжині річки. Отже, динамічне рівняння для рідкої фази потоку повинно описувати зміну витрати води при проходженні хвилі прориву.

Питання про врахування зміни величини максимальної витрати повенеких вод, паводків або хвиль прориву в процесі просування їх річкою виникає при вирішенні багатьох гідрологічних та гідравлічних задач.

У випадку прориву греблі максимальна витрата буде значно збільшена, а отже значно збільшаться і деформації русла, що відіб'ється на режимі експлуатації пропускних транспортних споруд.

Відомо, рух води по руслу супроводжується двома явищами — розпластуванням та перекосом. Розпластування викликано тим, що лобова частина хвилі просувається з більшою швидкістю, ніж задня частина, оскільки похил водної поверхні більший на лобовій частині. Внаслідок чого задня частина хвилі ніби відстає від лобової, довжина хвилі, тобто довжина ділянки ріки, яку займає хвиля, збільшується, а максимальний рівень та витрата зменшуються. Перекіс хвилі викликаний відносно швидким просуванням верхньої її частини, яка прилягає до гребня; причиною перекосу виступає велика глибина і відповідно велика швидкість течії біля вершини хвилі. В результаті перекосу гілка підйому на гідрографі стає більш крутою, ніж гілка спаду, а максимальний рівень та витрата води деякою мірою зменшуються.



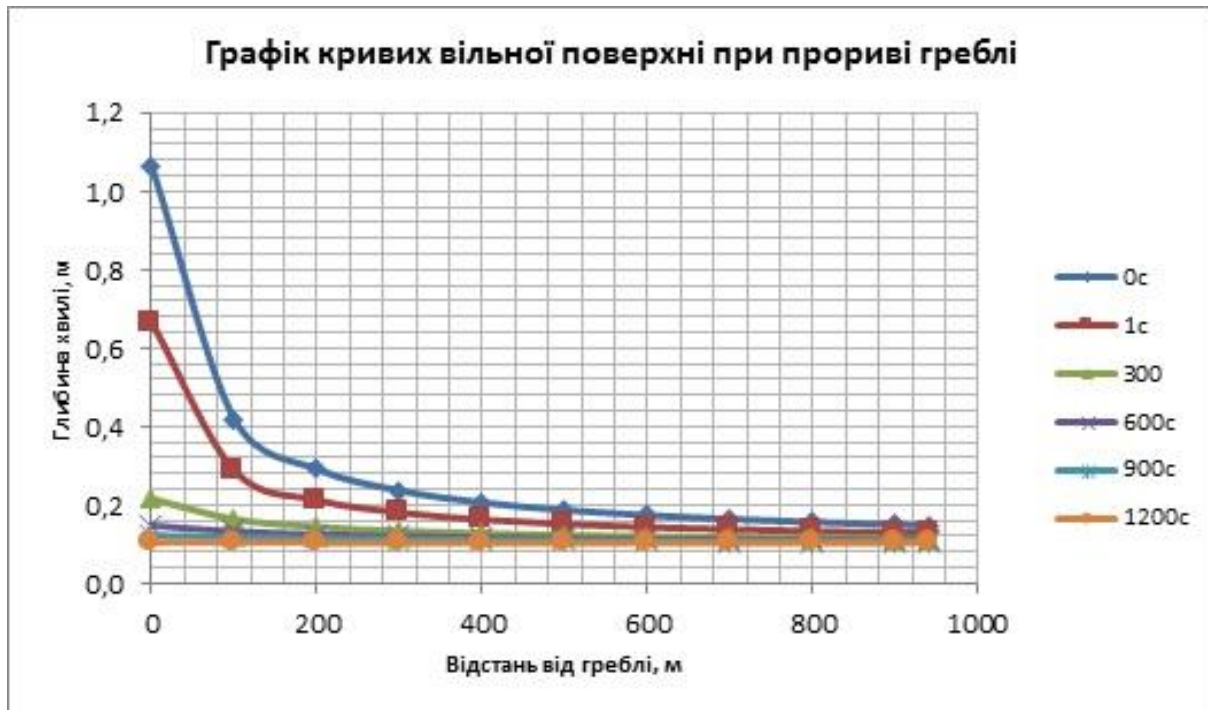
**Рисунок 1** – Гідравлічна схема просування хвилі

Залежність між максимальною витратою води та відстанню від початкового перерізу, до того, який аналізується була отримана С.Н. Крицьким та М.Ф. Менкелем [2] та має наступний вигляд:

$$Q = Q_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2} \cdot l}} \quad (4)$$

де  $n$  — коефіцієнт шорсткості;

$W$  — об'єм, який повинен залишатися сталим при переміщенні хвилі вздовж річки.



**Рисунок 2** – Графік кривих вільної поверхні у нижньому б'єфі при прориві греблі

Вивчаючи вираз (4) можна зробити висновки, що основними факторами, які впливають на інтенсивність зменшення по довжині ріки максимальної витрати є гострота гідрографу, яка характеризується відношенням  $Q_{\max}/W$ , шорсткість русла та похил ріки. Максимальна витрата води зменшується по мірі просування хвилі вздовж ріки тим інтенсивніше, чим гостріший гідрограф, тобто чим більше співвідношення  $Q_{\max}/W$ , чим більший коефіцієнт шорсткості русла  $n$  та чим менший похил ріки  $i_0$ .

Отже можемо записати систему рівнянь, що складає математичну модель загального розмиву при прориві греблі:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial l} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0; \\ G = A \cdot B_p \cdot V^4; \\ Q = B \cdot h \cdot V; \\ Q = Q_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2} \cdot l} \end{cases} \quad (5)$$

Для аналітичної реалізації даної математичної моделі спершу слід визначити градієнт витрати наносів (похідну по довжині). З цією метою, використовуючи рівняння нерозривності для потоку, витрата наносів записується в такий спосіб:

$$G = A \cdot B_p \cdot \frac{Q^4}{h^4} \quad (6)$$

Зробивши заміну  $1 + \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2} \cdot l = \lambda$  для спрощення розрахунків, вираз (6) набуде вигляду:

$$G = A \cdot \frac{Q_0^4}{B_p^3 \cdot h^4 \cdot \lambda^2} \quad (7)$$

Похідна від функції (7) буде такою:

$$\frac{dG}{dl} = \frac{A \cdot Q_0^4}{B_p^3} \cdot \left( - \frac{4 \cdot h^3 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial l} + 2 \cdot \lambda \cdot h^4 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial l}}{h^8 \cdot \lambda^4} \right) \quad (8)$$

З метою спрощення виразу знаходимо похідну:

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{d}{dl} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2} \cdot l \right) = \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2}$$

$$d\lambda = \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2} dl$$

Отже, тепер похідна (8) набуває наступного вигляду:

$$\frac{dG}{dl} = - \frac{4 \cdot A \cdot Q_0^4}{B_p^3 \cdot h^5 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{dh}{dl} - \frac{2 \cdot A \cdot Q_0^4}{B_p^3 \cdot h^4 \cdot \lambda^3} \cdot \frac{2 \cdot Q_0^2 \cdot n^2}{W^2 \cdot i_0^2} \quad (9)$$

Квазілінійне рівняння руслових деформацій виводиться з рівняння балансу наносів, після заміни в ньому похідної  $\partial G/\partial l$  її виразом (9).

Поділивши всі члени на ширину русла  $B_p$ , остаточно будемо мати:

$$\frac{4 \cdot A \cdot Q_0^4}{B_p^4 \cdot h^5 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{1}{dl} - \frac{1}{dt} = - \frac{4 \cdot A \cdot Q_0^6 \cdot n^2}{B_p^4 \cdot h^4 \cdot \lambda^3 \cdot W^2 \cdot i_0^2} \cdot \frac{1}{dh}.$$

Далі здійснюється заміна квазілінійного рівняння руслових деформацій еквівалентною йому системою звичайних диференціальних рівнянь.

$$\frac{dl}{\frac{4 \cdot A \cdot Q_0^4}{B_p^4 \cdot h^5 \cdot \lambda^2}} = dt = - \frac{dh}{\frac{4 \cdot A \cdot Q_0^6 \cdot n^2}{B_p^4 \cdot h^4 \cdot \lambda^3 \cdot W^2 \cdot i_0^2}}. \quad (10)$$

Для складання двох звичайних рівнянь треба згуртувати їх попарно в будь-якому порядку. Перше з них утворюється внаслідок комбінації крайніх членів системи (10):

$$\frac{4 \cdot A \cdot Q_0^4}{B_p^4 \cdot h^5 \cdot \lambda^2} \cdot dh = - \frac{4 \cdot A \cdot Q_0^6 \cdot n^2}{B_p^4 \cdot h^4 \cdot \lambda^3 \cdot W^2 \cdot i_0^2} \cdot dl.$$

Після скорочення подібних членів це рівняння зводиться до звичайного диференціального з відокремленими змінними:

$$\frac{dh}{h} = - \frac{d\lambda}{2\lambda}.$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини, отримується його загальне рішення:

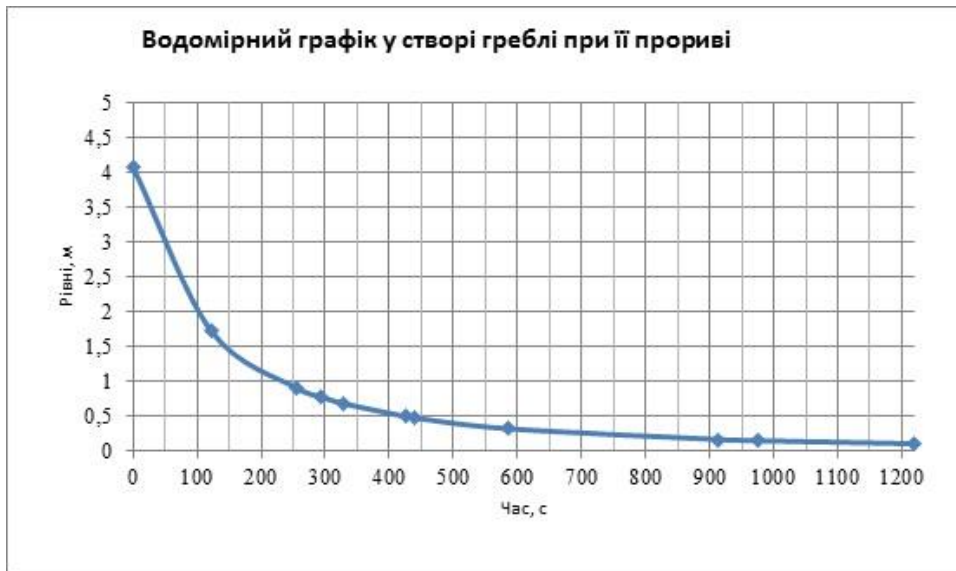
$$h \cdot \lambda^{0.5} = \psi_1. \quad (11)$$

Друге рівняння доцільно утворити, поєднавши перший і другий члени системи (10):

$$\frac{4 \cdot A \cdot Q_0^4}{B_p^4 \cdot h^5 \cdot \lambda^2} \cdot dt = dl.$$

Воно теж дозволяє відокремити змінні і його інтеграл набуває виду:

$$\lambda^3 - \frac{24 \cdot A \cdot n^2}{B_p^4 \cdot W^2 \cdot i_0^2 \cdot h^5} \cdot \int Q_0^6 = \psi_2. \quad (12)$$



**Рисунок 3** – Водомірний графік у створі греблі при її прориві

Загальне рішення диференціальних рівнянь з частинними похідними являє собою невизначену функцію  $\Phi$  від інтегралів (11) та (12):

$$\Phi\left(h \cdot \lambda^{0.5}; \lambda^3 - \frac{24 \cdot A \cdot n^2}{B_p^4 \cdot W^2 \cdot i_0^2 \cdot h^5} \cdot \int Q_0^6\right) = 0. \quad (13)$$

Вид функції  $\Phi$  визначається шляхом врахування початкових умов, тобто розв'язанням задачі Коші.

Оскільки розмив починається безпосередньо вже після руйнування греблі, то приймемо

$t = 1$ , а водна поверхня приймає форму хвилі, висоту якої можна знайти наступним чином [3]:

$$h = \frac{Q}{B_p} + 0,1.$$

Розв'язавши задачу Коші для даних початкових умов отримаємо наступну залежність для визначення розмиву при прориві греблі:

$$h = \left(\frac{Q}{B_p} + 0,1\right) \cdot \left(1 + \frac{24 \cdot A \cdot n^2}{B_p^4 \cdot W^2 \cdot i_0^2 \cdot h^5 \cdot \lambda^3} \cdot (\Gamma - \Gamma_0)\right)^{\frac{1}{6}}, \quad (14)$$

де  $\Gamma = \int Q_0^6 dt$  — інтегральна функція гідрографу хвильової витрати.



$\Gamma_0 = Q_0^6 \cdot 1c$  — інтегральна функція гідрографу хвильової витрати в момент руйнування греблі.



**Рисунок 4** – Гідрограф загальної витрати при прориві греблі

Для здійснення розрахунків стосовно визначення загального розмиву треба знати вихідні гідравлічні параметри водотоку і хвилі прориву, такі як: водомірний графік, гідрограф, інтегральну функцію гідрографу.

Водомірний графік у випадку прориву греблі повинен показувати зміну рівня води водосховища при її виливі в залежності від часу  $H = f(t)$  [4]:

$$H = \left( \frac{2 \cdot \Omega \cdot H_{np}^{0,5}}{k_{np} \cdot B_{\Gamma} \cdot H_{np}^{0,5} \cdot t + 2 \cdot \Omega} \right), \quad (15)$$

де  $k_{np}$  – коефіцієнт, що враховує відношення можливої ширини прориву до довжини греблі, який приймають: для нових земляних гребель V класу, що знаходяться в задовільних умовах експлуатації  $k_{np} = 0,50$ ; для старих земляних гребель, що не мають класу (при млинах тощо), а також гребель V класу в незадовільному стані  $k_{np} = 0,75$ .

$\Omega$  — осереднена по довжині площа дзеркала водосховища.

Гідрограф хвилі прориву обчислюється наступним чином:

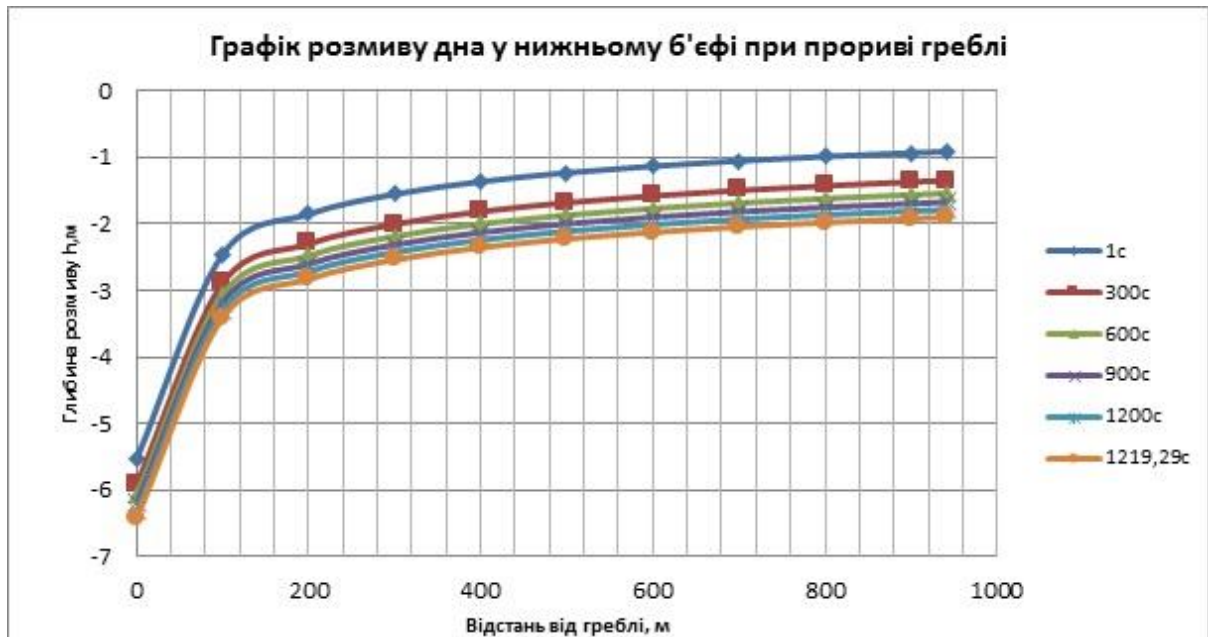
$$Q_{np} = k_{np} \cdot B_{\Gamma} \cdot \left( \frac{2 \cdot \Omega \cdot H_{np}^{0,5}}{k_{np} \cdot B_{\Gamma} \cdot H_{np}^{0,5} \cdot t + 2 \cdot \Omega} \right)^3 + Q_{pn}, \quad (16)$$

де  $Q_{pn}$  – руслова природна паводкова витрата.

Водомірний графік (рис.3), гідрограф загальної витрати (рис.4), графік кривих вільної поверхні (рис.2) та графік кривої розмиву дна у нижньому б'єфі при прориві греблі (рис.5) було побудовано на прикладі річки Сукіль, що протікає у Івано-Франківській області.

### Висновки

Таким чином математична модель для розрахунку загального розмиву при прориві греблі – це система рівнянь, які описують дві фази потоку: рідку і тверду. В якості динамічного рівняння для рідкої фази потоку для врахування швидкої зміни його параметрів запропоновано використання рівняння додаткової витрати при проходженні хвилі прориву та наведено результати застосування цієї математичної моделі.



**Рисунок 5** – Графік розмиву дна у нижньому б'єфі при прориві греблі

### Література

1. Ткачук С.Г. Теорія розмивів на мостових переходах / С.Г.Ткачук. — Д.: АТЗТ «Видавництво «Донеччина», 2009. – 200 с.
  2. Крицкий С.Н. О распластывании волны высоких вод при движении по призматическому руслу / С.Н.Крицкий, М.Ф.Менкель. // Проблемы регулирования речного стока. — М.: Изд. АН СССР, 1956. — Вып.6. — С. 248-262.
  3. Ткачук С.Г. Гідравліка. Гідрологія. Гідрометрія: підручник/ С.Г.Ткачук. — К.: Кафедра, 2013. — 392 с.
- Ткачук С.Г. Види хвиль і побудова кривої вільної поверхні при прориві греблі/ С.Г.Ткачук, К.Ю.Матвеева. // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. — К.: НТУ, 2013. — Вип.87. — С. 109-111.