ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА ТРАНСПОРТНИХ СПОРУД

УДК 539.3

Марчук О.В., д-р техн. наук, **Гнєдаш С.В.,**
Левківський С.А.

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ВОЛОКНИСТИХ ПОРОЖНИСТИХ ВАЛІВ

Анотація. У статті запропонований підхід до розрахунку волокнистих порожнистих валів.

Об’єкт дослідження - статичний напружено-деформований стан волокнистих порожнистих валів.

Мета роботи - дослідження моделі розрахунку волокнистих порожнистих валів.

Метод дослідження - розроблена авторами математична модель напружено-деформованого стану шаруватих циліндричних оболонок та її реалізація на основі поліноміальної апроксимації.

Побудована чисельно-аналітична математичну модель розрахунку волокнистих полих валів. Волокнистисть моделюється анізотропією жорсткостних характеристик. Модель враховує просторовий характер деформування. Модель заснована на розділенні порожнистого циліндричного валу по товщині концентричними поверхнями на ряд складових циліндричних оболонок, достатньо тонких, щоб можна було нехтувати зміною їх кривизни по товщині. Тим самим дискретно враховується зміна кривизни за товщиною конструкції. В рамках припущення сталості кривизни для складової оболонки розподіл компонент тензора напружень та вектора переміщень по товщині оболонки розшукується аналітично точно. Проведено аналіз необхідності урахування обтиснення в задачах кручення анізотропних валів.

Результати статті можуть бути використані при розрахунку циліндричних оболонок з композитного матеріалу.

Прогнозовані припущення щодо розвитку об’єкта дослідження - динамічний напружено-деформований стан волокнистих порожнистих валів.

Ключові слова: волокнисті порожнисті вали, локальні дотичні навантаження, різні контурні умови.

Аннотация. В статье предложен подход к расчету волокнистых полых валов.
Объект исследования - статическое напряженно-деформированное состояние волокнистых полых валов.
Цель работы - исследование модели расчета волокнистых полых валов.
Метод исследования - разработанная авторами математическая модель напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек и ее реализация на основе полиномиальной аппроксимации.
Построена численно-аналитическая математическая модель расчета волокнистых полых валов. Волокнистость моделируется анизотропией жорсткостных характеристик. Модель учитывает пространственный характер деформирования. Модель основана на разделении полого цилиндрического вала по толщине концентрическими поверхностями на ряд составляющих цилиндрических оболочек, достаточно тонких, чтобы можно было пренебрегать изменением их кривизны по толщине. Тем самым дискретно учитывается изменение кривизны за толщиной конструкции. В рамках предположения постоянства кривизны для составной оболочки распределение компонента тензора напряжений и вектора перемещений по толщине оболочки разыскивается аналитически точно. Проведен анализ необходимости учета обжатия в задачах кручения анизотропных валов.
Результаты статьи могут быть использованы при расчетах цилиндрических оболочек из композитного материала.
Прогнозируемые предположения относительно развития объекта исследования - динамическое напряженно-деформированное состояние волокнистых полых валов.
Ключевые слова: волокнистые полые валы, локальные касательные нагрузки, разные контурные условия.

Annotation. The approach for analysis fibrous hollow shafts has been suggested in the article.
The object of studying is static stress strain behavior of fibrous hollow shafts.
The aim of work is research model for fibrous hollow shafts using analytical and numerical method.

Research method: stress behavior mathematical model of laminated cylindrical shells condition and its implementing on the basis of polynominal approximity has been developed by the authors.
Numerical and analytical mathematical model for fibrous hollow shafts is developed. Stringiness simulated by anisotropic stiffness characteristics. The model takes into account the spatial nature of the deformation. The model is based on cylindrical hollow shaft thickness division by concentric surfaces into the number of composite cylindrical sheaths which are thin enough to ignore their thickness curve change. Thus, the discrete taken account change in curvature the thickness of the structure. Under the assumption of constant curvature for the shell component distribution of the stress tensor components of the displacement vector and the thickness of the shell is sought analytically accurate. The need to incorporate in the compression torsion shaft anisotropic problems an analysis.
The article conclusions may be used while calculating cylindrical sheaths of composite material.
There are predictable suppositions concerning the development of the object under study such as fibrous hollow shafts dynamic stress strain behavior state.
Keywords: fibrous hollow shafts, local shearing stress load, different contour states.

Вступ

В різних галузях техніки та будівництва все більшого застосування отримують пластикові шаруваті волокнисті анізотропні вали, що мають високий рівень різномодульності складових матеріалів. Це конструкції літальних апаратів, наземного і підземного транспорту, машинобудівних систем та інших об’єктів. Застосування прямих точних методів просторової теорії пружності для дослідження напружено-деформованого стану таких конструкцій - ускладнене. Тому для їх розв’язання застосовують різні припущення. Їх перелік можна знайти в оглядах [1-8].

У даній статті представлена до розгляду модель розрахунку волокнистих порожнистих валів. Ця модель заснована на розділенні порожнистого циліндричного валу по товщині концентричними поверхнями на ряд складових циліндричних оболонок, достатньо тонких, щоб можна було нехтувати зміною їх кривизни по товщині. Задовольняючи умовам контакту на зовнішніх поверхнях між складовими оболонками, описують напружено-деформований стан циліндричного валу з дискретним обліком зміни кривизни по товщині.

Розподіл тензора напружень та вектора переміщень в рамках припущення про сталість кривизни в складових циліндричної оболонки розшукують аналітично.

1 Побудова рішення

Рівняння динамічної рівноваги *k*-того анізотропного шару циліндричної оболонки у змішаній формі в умовах осесиметричної деформації визначаються на основі наступних співвідношень (вісь *x* оболонки направлена уздовж твірної) [2]:

$$\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r}+\frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}-B_{55}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k)}-B_{54}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k)}=0;$$

$$B_{13}^{(k)}\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r}+B_{23}^{(k)}\frac{1}{r}U_r^{(k)}+B_{63}^{(k)}\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}-B_{33}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}=0;$$

$$\frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r}-\frac{1}{r}U_r^{(k)}-B_{45}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k)}-B_{44}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k)}=0;$$

$$B_{11}^{(k)}\frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2}+B_{12}^{(k)}\frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}+B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2}+\frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{xr}^{(k)}+B_{13}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x}=0;$$

$$B_{21}^{(k)}\frac{1}{r}\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}+B_{22}^{(k)}\frac{1}{r^2}U_r^{(k)}+B_{26}^{(k)}\frac{1}{r}\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial x}-\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r}+$$

$$+B_{23}^{(k)}\frac{1}{r}\sigma_{rr}^{(k)}-\frac{1}{r}\sigma_{rr}^{(k)}=0;$$

$$B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2}+B_{26}^{(k)}\frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}+B_{66}^{(k)}\frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2}+B_{36}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}^{(k)}=0,$$

де вміст жорсткістних характеристик $B_{ij}^{(k)}$ розкривається в наступному взаємозв'язку напружень і деформацій:

$$\sigma_{xx}^{(k)}=B_{11}^{(k)}e_{xx}^{(k)}+B_{12}^{(k)}e_{\theta\theta}^{(k)}+B_{13}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}+B_{16}^{(k)}2e_{x\theta}^{(k)};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k)}=B_{21}^{(k)}e_{xx}^{(k)}+B_{22}^{(k)}e_{\theta\theta}^{(k)}+B_{23}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}+B_{26}^{(k)}2e_{x\theta}^{(k)};$$

$$\sigma_{x\theta}^{(k)}=B_{61}^{(k)}e_{xx}^{(k)}+B_{62}^{(k)}e_{\theta\theta}^{(k)}+B_{63}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}+B_{66}^{(k)}2e_{x\theta}^{(k)};$$

$$B_{33}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}=B_{13}^{(k)}e_{xx}^{(k)}+B_{23}^{(k)}e_{\theta\theta}^{(k)}+e_{rr}^{(k)}+B_{36}^{(k)}2e_{x\theta}^{(k)};$$

$$e_{r\theta}^{(k)}=B_{44}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k)}+B_{45}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k)};$$

$$e_{xr}^{(k)}=B_{54}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k)}+B_{55}^{(k)}\sigma_{xr}^{(k)}. \qquad (2)$$

Поздовжні і колові напруження знаходяться із закону Гука:

$$\sigma_{xx}^{(k)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}+B_{12}^{(k)}\frac{1}{r}U_r^{(k)}+B_{13}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}+B_{16}^{(k)}\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k)}=B_{21}^{(k)}\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}+B_{22}^{(k)}\frac{1}{r}U_r^{(k)}+B_{23}^{(k)}\sigma_{rr}^{(k)}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}. \qquad (3)$$

Шукані переміщення і напруження записуються в такому вигляді:

$$U_x^{(k)}=f_1^{(k)}(r)cos(\frac{\pi mx}{a});\ \ U_\theta^{(k)}=f_2^{(k)}(r)cos(\frac{\pi mx}{a});$$

$$U_r^{(k)}=f_3^{(k)}(r)sin(\frac{\pi mx}{a});$$

$$\sigma_{xr}^{(k)}=f_4^{(k)}(r)cos(\frac{\pi mx}{a});\quad \sigma_{\theta r}^{(k)}=f_5^{(k)}(r)cos(\frac{\pi mx}{a});$$

$$\sigma_{rr}^{(k)}=f_6^{(k)}(r)sin(\frac{\pi mx}{a}).$$

Тоді рівняння рівноваги (1) перетворюються наступним чином:

$$f_{1,r}^{(k)}=-f_3^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+f_4^{(k)}B_{55}^{(k)}+f_6^{(k)}B_{54}^{(k)};$$

$$f_{3,r}^{(k)}=f_1^{(k)}B_{13}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)-f_3^{(k)}\frac{1}{r}B_{23}^{(k)}+f_2^{(k)}B_{36}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+f_6^{(k)}B_{33}^{(k)};$$

$$f_{2,r}^{(k)}=-f_2^{(k)}\frac{1}{r}+f_4^{(k)}B_{45}^{(k)}+f_6^{(k)}B_{44}^{(k)};$$

$$f_{4,r}^{(k)}=f_1^{(k)}B_{11}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-f_3^{(k)}\frac{1}{r}B_{12}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)+f_2^{(k)}B_{16}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-$$
$$-f_4^{(k)}\frac{1}{r}-f_6^{(k)}B_{13}^{(k)}\left(\frac{\pi m}{a}\right);$$

$$f_{6,r}^{(k)} = -f_1^{(k)} \frac{1}{r} B_{12}^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right) + f_3^{(k)} \frac{1}{r^2} B_{22}^{(k)} - f_2^{(k)} \frac{1}{r} B_{26}^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right) +$$

$$+ f_4^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right) + f_6^{(k)} (\frac{1}{r} B_{23}^{(k)} - \frac{1}{r});$$

$$f_{5,r}^{(k)} = f_1^{(k)} B_{16}^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - f_3^{(k)} \frac{1}{r} B_{26}^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right) + f_2^{(k)} B_{66}^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 -$$

$$- f_6^{(k)} B_{36}^{(k)} \left(\frac{\pi m}{a} \right) - f_5^{(k)} \frac{2}{r} . \qquad (4)$$

2 Результати числових досліджень

У якості дослідницького прикладу розглядався напружено-деформований стан чотиришарового волокнистого порожнистого валу. Волокнисткість моделювалася ортотропним матеріалом з наступними фізико-механічними характеристиками: $E_{\tilde{o}} / E_{\theta} = 25/1$; $E_{\theta} = E_r$; $G_{x\theta} / E_r = 0{,}5/1$; $G_{\theta r} / E_r = 0{,}2/1$; $G_{xr} = G_{x\theta}$; $\nu_{x\theta} = \nu_{xr} = \nu_{\theta r} = 0{,}25$. Даний матеріал в шарах був повернутий наступним чином: $\pi/4$; $-\pi/4$; $\pi/4$; $-\pi/4$. Співвідношення довжини валу до товщини його стінок $L/h = 50$. Варіювалося співвідношення висоти до радіусу кривизни (вимірювалося на середені товщини порожнистого валу) $h/R = 1/3$; $h/R = 1/30$. Виконувався просторовий розрахунок (P), розрахунок без урахування обтиснення (S) (моделювалося відповідним заданням жорсткістних характеристик). Закріпленя шарнірнорухоме ліворуч ($x = 0$); жорстке затиснення, але рухоме в радіальному напряму, праворуч ($x = L/2$). Скручувальне навантаження прикладене на зовнішній поверхні та розподілене по закону косинуса.

Результати розрахунку при різному співвідношенні h/R ($\overline{U}_x = U_x E_r / q_{\theta}$; $\overline{U}_r = U_r E_r / q_{\theta}$; $\overline{U}_{\theta} = U_{\theta} E_r / q_{\theta}$; та $\overline{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} / q_{\theta}$; $\overline{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / q_{\theta}$; $\overline{\sigma}_{x\theta} = \sigma_{x\theta} / q_{\theta}$) наведені у таблицях 1-4.

Як видно з таблиць, для тонких порожнистих валів з великим радіусом кривизни ($h/R = 1/30$), і з малим радіусом кривизни ($h/R = 1/3$) нехтування обтисненням та зсувом не призводить до суттєвих похибок в результатах розрахунку. Урахування обтиснення при такому розподілі навантаження необов’язкове.

Таблиця 1 – Максимальні переміщення на межах шарів при $h/R = 1/30$

$\bar{U}_x$		$\bar{U}_r$		$\bar{U}_\theta$	
P	S	P	S	P	S
-1,2810	-1,2612	-3,0664		39,8043	39,8005
-1,1763	-1,1555	-3,0606		40,2078	40,2040
-0,8833	-0,8617	-3,0918	-3,1241	40,9203	40,9166
-0,9618	-0,9396	-3,0844		41,7646	41,7609
-0,4761	-0,4535	-3,1155		42,9263	42,9226

Таблиця 2 – Максимальні переміщення на межах шарів при $h/R = 1/3$

$\bar{U}_x$		$\bar{U}_r$		$\bar{U}_\theta$	
P	S	P	S	P	S
7,1586	7,6455	1,1931		44,0832	43,6325
7,2087	7,7020	1,0337		48,5577	48,0647
7,4537	7,9566	0,8469	0,8702	53,3748	52,8441
7,3385	7,8482	0,7101		58,3429	57,7644
7,8092	8,3158	0,5128		63,7005	63,0772

Таблиця 3 – Напруження на межах шарів при $h/R = 1/30$

$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{x\theta}$	
P	S	P	S	P	S
-15,1071	-15,1265	-15,2915	-15,3116	-16,1248	-16,1425
-15,3361	-15,3210	-15,5129	-15,4986	-16,3238	-16,3391
15,0559	15,0681	14,8791	14,8905	-15,9677	-15,9493
15,2287	15,2110	15,0701	15,0527	-16,1458	-16,1296
-15,7018	-15,7168	-15,8604	-15,8750	-16,7179	-16,7311
-16,0159	-15,9956	-16,1783	-16,1579	-17,0246	-17,0355
15,5528	15,5703	15,3904	15,4080	-16,5171	-16,5033
15,8097	15,7964	15,6776	15,6655	-16,8029	-16,7912

Таблиця 4 – Напруження на межах шарів при $h/R = 1/3$

$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{x\theta}$	
P	S	P	S	P	S
-16,9418	-17,7826	-16,0147	-16,9540	-17,5367	-18,3161
-19,7244	-19,6778	-18,8956	-18,8775	-20,0094	-20,3080
16,9789	16,6528	17,8078	17,4532	-18,9879	-18,2933
18,5879	18,1825	19,3386	18,9725	-20,3168	-19,9572
-21,7565	-21,7608	-21,0059	-20,9708	-22,5492	-22,4825
-24,4617	-23,7091	-23,7821	-22,9483	-24,9362	-24,5519
19,6380	19,9533	20,3176	20,7141	-21,9198	-21,8394
21,4703	21,6336	22,1075	22,4046	-23,5092	-23,6808

Література

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наукова думка,1991.– 216 с.
2. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. –К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.
3. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор). // Прикладная механика.– 2013.–49, N2. – С. 3–70.
4. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И. Концентрация напряжений около отверстий в оболочках из композитных материалов // Прикладная механика. – 2001.–37, N2. – С. 3–43.
5. Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E. Analis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined interal pressure and thermo-mechanical loading wich thermal variations // Compos. Struct. – 2009.– 88.– P. 532– 541.
6. Grigorenko, Ya.,M., Yaremchenko, S.,N.: Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylidrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech.-2008.- 40,N9.- P. 998-1005.
7. Grigorenko, Ya.,M., Grigorenko, A.,Ya., Zakhariychenko, L.,I. : Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated llipticcross-section // Int. Appl. Mech.-2009. – 43, N12. – P. 1372-1379.
8. Hosine A., Chapelle D., Baubakar M.L.,et al. Experimental and analytical investigation of the cylindsrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // Int. J. Press. Vess. Piping.– 2009.– 86.– P.649– 655.
9. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthorropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Composite Materials. – 1999. – 35, N4. – P. 285–292.
10. Marchuk A.V., Il’chenko Ya. L.,and Gnedash S.V. Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells.// Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N4. – P. 449–455.

Рецензенти

Кірічек Ю.О., д-р техн. наук, ПДАБА (Дніпропетровськ)

Солодкий С.Й., д-р техн. наук, НУ “Львівська політехніка” (Львів)

Reviewers

Kirichek Yu.O., Dr.Tech.Sci., PSACEA (Dnipropetrovsk)

Solodkyi S.Yo., Dr.Tech.Sci., NU “Lviv Polytechnic” (Lviv)