УДК 539.3

Лоза І.А., д-р фіз-мат наук, **Шаповалова А. І.**

ПРО ПОШИРЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ АКУСТОЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЬ У СУЦІЛЬНИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРАХ З ОСЬОВОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ

Анотація. В статті запропоновано застосування правила Лопіталя-Бернуллі для отримання розв'язуючої системи рівнянь задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах, яка не містить особливої точки.

Об'єкт дослідження – суцільні п'єзокерамічні циліндри.

Мета роботи виведення розв'язуючої системи рівнянь задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах, яка не містить особливої точки.

Мета дослідження – система рівнянь задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах, яка не містить особливої точки.

Розв'язуюча система рівнянь, яка описує дану задачу має особливу точку $r = 0$. Навіть для випадку однорідного циліндру отримання аналітичного розв'язку в циліндричних функціях пов'язано зі значними математичними складнощами і можливо лише за умови певної симетрії властивостей матеріалу. Це випадок осьової поляризації п'єзокераміки для повздовжніх хвиль та випадок колової поляризації для крутильних хвиль. Однак після отримання даного розв'язку, при його чисельному аналізі, виникає проблема апроксимації циліндричних функцій степеневими рядами, збіжності степеневих рядів до заданої функції, тощо. Можливо саме тому в роботах де отримано аналітичний розв'язок даних задач не наведено результатів чисельного аналізу. Відзначимо, що по сьогоднішній день менш вивченими являються задачі, коли матеріал циліндру являється неоднорідним. Це зумовлено тим, що при зв'язаних видах руху відповідні крайові задачі не допускають розв'язку в циліндричних функціях.

В даній роботі запропоновано застосування правила Лопіталя-Бернуллі для отримання розв'язуючої системи рівнянь, яка не містить особливої точки.

Отриману крайову задачу можна інтегрувати чисельним методом, наприклад, методом дискретної ортогоналізації. Перевагою даного підходу є та обставина, що не виникає особливих складнощів при інтегруванні даної задачі зі змінними коефіцієнтами. Наприклад, коли фізико-механічні властивості матеріалу циліндру є не сталими, а функціями товщинної координати. Функції, які описують фізико механічні властивості матеріалу можуть бути як кусково-неперервними (шаруватий матеріал), так і континуально неперервними (градієнтні матеріали). У першому випадку, до вказаних рівнянь, слід додати умови спряження на межах розділу двох матеріалів, у другому випадку необхідно задати закон зміни властивостей матеріалу по товщині.
Ключові слова: суцільні п'єзокерамічні циліндри, акустоелектричні хвилі, електропружність.

Аннотация. В статье предложено применение правила Лопиталя-Бернулли для получения разрешающей системы уравнений задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах, которая не содержит особой точки.
Объект исследования – сплошные пьезокерамические цилиндры.
Цель работы – вывод разрешающей системы уравнений задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах, которая не содержит особой точки.
Метод исследования – система уравнений задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах, которая не содержит особой точки.
Решающая система уравнений, которая описывает эту задачу, имеет особую точку $r = 0$. Даже для случая однородного цилиндра получение аналитического решения в цилиндрических функциях связано со значительными математическими трудностями и возможно лишь при условии определенной симметрии свойств материала. Это случай осевой поляризации пьезокерамики для продольных волн и случай круговой поляризации для крутильных волн. Однако после получения данного решения, при его численном анализе, возникает проблема аппроксимации цилиндрических функций степенными рядами, сходимости степенных рядов к заданной функции и т.д. Возможно, именно поэтому в работах, где получено аналитическое решение данных задач,

не приведены результаты численного анализа. Отметим, что по сегодняшний день менее изученными являются задачи, когда материал цилиндра является неоднородным. Это обусловлено тем, что при связанных видах движения соответствующие краевые задачи не допускают решения в цилиндрических функциях.

В данной работе предложено применение правила Лопиталя-Бернулли для получения разрешающей системы уравнений, которая не содержит особой точки. Полученную краевую задачу можно интегрировать численным методом, например, методом дискретной ортогонализации. Преимуществом данного подхода является то обстоятельство, что не возникает особых сложностей при интегрировании данной задачи с переменными коэффициентами. Например, когда физико-механические свойства материала цилиндра является не постоянными, а функциями толщинной координаты. Функции, описывающие физико-механические свойства материала, могут быть как кусочно-непрерывными (слоистый материал), так и континуально непрерывными (градиентные материалы). В первом случае, к указанным уравнениям, следует добавить условия сопряжения на границах раздела двух материалов, во втором случае необходимо задать закон изменения свойств материала по толщине.

Ключевые слова: сплошные пьезокерамические цилиндры, акустоэлектрические волны, электроупругость

Abstract. The paper proposes the usage of the rule of Bernoulli to get a system of equations that solves the problem of propagation of axisymmetric acoustoelectric waves in solid piezoceramic cylinders which doesn’t have an isolated singularity.

Object of the study - solid piezoceramic cylinders.

Purpose of the study – to draw the system of equations that solves the problem of propagation of axisymmetric acoustoelectric waves in solid piezoceramic cylinders that doesn’t have an isolated singularity.

Method of the study - the system of equations that solves the problem of spreading of axisymmetric acoustoelectric waves in solid piezoceramic cylinders, which does not have an isolated singularity.

The solving system of equations describing this problem has an isolated singularity – $r = 0$. Even in case of a homogeneous cylinder acquiring of an analytical solution among cylindrical functions has many mathematical difficulties and can only be possible if the material has certain symmetric properties - axial polarization of

longitudinal waves and circular polarization of torsional waves in piezoceramic materials. However, when this solution is found, some other issues, such as a problem of approximation cylindrical functions with power series or convergence of power series with given function, occur during its numerical analysis. All mentioned above could be considered as a main cause of why no numerical results presented in works with analytical solutions. In general the least studied to date are problems, when material is not homogeneous, which can be explained by the fact that the corresponding boundary value problems do not allow to find the solution of cylindrical functions in case of the bound types of movement.
The work proposes to apply the rule of Bernoulli to acquire the solving system of equations that does not have an isolated singularity. The received boundary value problem can be integrated using a numerical method, for example, the method of discrete orthogonalisation can be applied. The advantage of this technique is that there are any considerable difficulties with integrating this value problem with variable coefficients, for instance, if physical and mechanical characteristics of the cylinder are not constant, but functions of thickness coordinates. Functions describing mechanical and physical characteristics can be piecewise continuous (layered material) or continual continuous (functionally graded materials). In the first case, matching conditions at the boundaries should add to given functions between two materials. In the second case, it is necessary to add the law of variation of the material properties through thickness.
Keywords: solid piezoceramic cyliners, acoustelectrical waves, elastoelecricity

Вступ

Побудова дисперсійних співвідношень для акустоелектричних хвиль, що поширюються у циліндрі пов’язане з необхідністю розв’язання досить складної задачі про утворення пласких хвиль, які відбиваються від циліндричної границі. Вперше набори частинних розв’язків диференціальних рівнянь у частинних похідних (рівняння Ляме) у циліндричних координатах були побудовані в роботах Похгамера [1] та Крі [2,3]. З того часу виконано значну кількість робіт, присвячених дослідженню поведінки акустоелектричних хвиль у циліндричному хвилеводі кругового поперечного перерізу. Зміст проведених досліджень досить повно відображений в оглядах [4,5] та монографіях [6,7]. Слід підкреслити, що науковий інтерес до такого об’єкту, як циліндр, зумовлений з однієї сторони практичним значенням геометрії циліндра, а іншого боку – можливістю вивчити вплив кривизни, типу симетрії руху на характеристики хвильового поля. Розв’язуюча система рівнянь, яка описує дану задачу має особливу точку $r = 0$. Навіть для випадку однорідного циліндру отримання аналітичного розв’язку в циліндричних функціях пов’язано зі значними математичними складнощами і можливо лише за умови певної симетрії властивостей матеріалу. Це випадок осьової поляризації п’єзокераміки для повздовжніх хвиль та випадок колової поляризації для крутильних хвиль. Однак після отримання даного розв’язку, при його чисельному аналізі, виникає проблема апроксимації циліндричних функцій степеневими рядами, збіжності степеневих рядів до заданої функції, тощо. Можливо саме тому в перших роботах де отримано аналітичний розв’язок даних задач не наведено результатів чисельного аналізу. Відзначимо, що по сьогоднішній день менш вивченими являються задачі, коли матеріал циліндру являється неоднорідним. Це зумовлено тим, що при зв’язаних видах руху відповідні крайові задачі не допускають розв’язку в циліндричних функціях.

В даній роботі запропоновано застосування правила Лопіталя-Бернуллі для отримання розв’язуючої системи рівнянь, яка не містить особливої точки.

1. Постановка задачі. Розв’язуюча система рівнянь.

Повна система рівнянь, що описує дану задачу складається з рівнянь вісесиметричного повздовжнього руху у циліндричній системі координат r, θ, z

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\ \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\ + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_r - 0;$$
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z = 0; \qquad (1)$$

рівнянь електростатики

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0;\ E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r};\ E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \qquad (2)$$

геометричних співвідношень

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r};\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u_r;\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial u_z};\ \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \qquad (3)$$

та матеріальних співвідношень, які для випадку осьової поляризації мають вигляд

$$
\begin{gathered}
\sigma_{rr} = c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{11}E_z; \\
\sigma_{\theta\theta} = c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z; \\
\sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; \\
\sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r; \\
D_r = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \vartheta_{11}E_r. \\
D_z = e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \vartheta_{33}E_z;
\end{gathered}
\tag{4}
$$

де σ_{ij} – компоненти тензора механічних напружень, ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, c_{ij} – компоненти тензора модулів пружності, e_{ij} – компоненти тензора п'єзомодулів, ϑ_{ij} – компоненти тензора діелектричних проникностей, E_i – компоненти вектора напруженості електричного поля, D_i – компоненти вектора електричної індукції, u_i – компоненти вектора переміщень, ρ – густина матеріалу, ω – колова частота.

До описаної системи рівнянь необхідно додати граничні умови на бічній поверхні циліндра та умови регулярності в особливій точці $r = 0$.

Будемо розглядати такі види граничних умов:

а) бічна поверхня циліндра ($r = R$) вільна від механічних навантажень: $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$,

б) бічна поверхня жорстко закріплена: $u_r = u_z = 0$.

Електричні граничні умови на бічній поверхні циліндра вибираємо у вигляді:

а) поверхня вкрита тонким електродом $\varphi = 0$;

б) поверхня вільна від електродів $D_r = 0$.

2. Методика розв'язання вісесиметричної крайової задачі.

Як показує практика, для розв'язку подібних задач, розв'язувальний вектор зручно вибирати у змішаному вигляді, до його складу входять ті компоненти тензора механічних напружень, векторів механічних переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу через які формулюються граничні умови. Отже розв'язувальний вектор має вигляд:

$$
\mathrm{R} = \sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r \quad . \tag{5}
$$

Розв’язок задачі будемо шукати у вигляді біжучих хвиль:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{rr}(r,z,t)=i\sigma_{rr}(r)\,e^{i(kz-\omega t)};\ \sigma_{rz}(r,z,t)=\sigma_{rz}(r)\,e^{i(kz-\omega t)};\\
\varphi(r,z,t)=\varphi(r)\,e^{i(kz-\omega t)};\ u_r(r,z,t)=iu_r(r)\,e^{i(kz-\omega t)};\\
u_z(r,z,t)=u_z(r)\,e^{i(kz-\omega t)};\ D_r(r,z,t)=D_r(r)\,e^{i(kz-\omega t)}.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Розв’язуючи наші рівняння відносно компонент розв’язуючого вектора, з урахуванням (6), отримуємо:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}=\frac{1}{r}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}}-1\right)\sigma_{rr}-\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\Delta_5}{rc_{11}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\left(\frac{\Delta_4}{r^2c_{11}}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_r+\frac{\Delta_1}{rc_{11}}\frac{\partial u_z}{\partial z};\\
\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}=-\frac{c_{13}}{c_{11}}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}-\frac{1}{r}\sigma_{rz}+\frac{\Delta_3}{c_{11}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\Delta_1}{rc_{11}}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\left(\frac{\Delta_2}{c_{11}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z;\\
\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{e_{15}}{\Delta}\sigma_{rr}-\frac{c_{55}}{\Delta}D_r;\ \frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1}{c_{11}}\sigma_{rr}-\frac{e_{33}}{c_{11}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{c_{12}}{rc_{11}}u_r-\frac{c_{13}}{c_{11}}\frac{\partial u_z}{\partial z};\\
\frac{\partial u_z}{\partial r}=\frac{\varepsilon_{11}}{\Delta}\sigma_{rz}-\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{e_{51}}{\Delta}D_r;\ \frac{\partial D_r}{\partial r}=-\frac{e_{13}}{c_{11}}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}+\frac{\Delta_6}{c_{11}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\Delta_5}{rc_{11}}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\Delta_3}{c_{11}}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-\frac{1}{r}D_r.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

тут введені такі позначення:

$$
\begin{gathered}
\Delta=c_{55}\varepsilon_{11}+e_{15}{}^2;\ \Delta_1=c_{13}(c_{11}-c_{12});\ \Delta_2=c_{13}{}^2-c_{11}c_{33};\ \Delta_3=c_{13}e_{13}-c_{11}e_{11};\ \Delta_4=c_{11}^2-c_{12}^2;\\
\Delta_5=e_{13}(c_{11}-c_{12});\ \Delta_6=e_{13}^2+c_{11}\varepsilon_{33}.
\end{gathered}
$$

Рівняння (7) мають співмножники $1/r$, які при $r=0$ прямують до нескінченності. Так як разом зі знаменником до нуля прямують також деякі компоненти розв’язуючого вектора, вочевидь маємо невизначеність. Для розкриття цієї невизначеності скористаємось граничними значеннями при $r\to 0$: $\frac{\tau_{rz}}{r}\to\frac{d\tau_{rz}}{dr},\ \frac{u_r}{r}\to\frac{du_r}{dr},\frac{D_r}{r}\to\frac{dD_r}{dr}$.

Враховуючи ці граничні значення, а також той факт, що з умов симетрії випливає що: $\tau_{rz}\to 0, u_r\to 0,\ D_r\to 0$ при $r\to 0$, отримаємо для сингулярної точки $r=0$ наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}=-\rho\omega^2u_r;\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}=0;\ \frac{\partial u_z}{\partial r}=0;\ \frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1}{c_{11}+c_{12}}\sigma_{rr}+\frac{e_{33}}{c_{11}+c_{12}}k\varphi+\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}ku_z;$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}=-\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}k\sigma_{rz}+\frac{(c_{11}+c_{12})e_{33}-2c_{13}e_{13}}{2(c_{11}+c_{12})}k^2\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{(c_{11}+c_{12})c_{33}-2c_{13}^2}{c_{11}+c_{12}}k^2-\rho\omega^2\right)u_z; \tag{8}$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r}=-\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}k\sigma_{rz}-\frac{(c_{11}+c_{12})\varepsilon_{33}+2e_{13}^2}{2(c_{11}+c_{12})}k^2\varphi+\frac{(c_{11}+c_{12})e_{33}-2c_{13}e_{13}}{2(c_{11}+c_{12})}k^2u_z.$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\Omega=\omega R\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}};\tilde{c}_{ij}=\frac{c_{ij}}{\lambda};\tilde{e}_{ij}=\frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\lambda}};\tilde{\vartheta}_{ij}=\frac{\vartheta_{ij}}{\varepsilon_0};x=\frac{r}{R};\sigma_{rr}(r)=\lambda U_1(x);\sigma_{rz}(r)=\lambda U_2(x);$$

$$\varphi(r)=R\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}}U_3(x);u_r(r)=RU_4(x);u_z(r)=RU_5(x);D_r(r)=\sqrt{\varepsilon_0\lambda}U_6(x),$$

де ε_0 – діелектрична проникність вакууму; $\lambda=10^{10}\,\frac{H}{м^2}$.

Тоді розв’язуюча система набуде вигляду: $\frac{d\mathrm{U}}{dx}=A\mathrm{U}$.

Отриману крайову задачу можна інтегрувати чисельним методом, наприклад, методом дискретної ортогоналізації. На першому кроці ($r=0$), ми використовуємо систему (8), а на усіх наступних (7). Перевагою даного підходу є та обставина, що не виникає особливих складнощів при інтегруванні даної задачі зі змінними коефіцієнтами. Наприклад, коли фізико-механічні властивості матеріалу циліндру є не сталими, а функціями товщинної координати. Функції, які описують фізико механічні властивості матеріалу можуть бути як кусково-неперервними (шаруватий матеріал), так і континуально неперервними (градієнтні матеріали). У першому випадку, до вказаних рівнянь, слід додати умови спряження на межах розділу двох матеріалів, у другому випадку необхідно задати закон зміни властивостей матеріалу по товщині.

3. Числові результати. Аналіз

Для прикладу розглянемо випадок суцільного циліндру з п’єзокераміки PZT 4, поляризованої в осьовому напрямі.

На рис.1 представлено перші п’ять гілок дисперсійних співвідношень. Як видно з них тільки перша гілка у короткохвильовому діапазоні виходить на хвилю, що поширюється без дисперсії. Як показує подальший кінематичний аналіз це хвиля Релєєвського типу.

На рис.2 представлено розподіл радіальних та осьових переміщень по товщині циліндра. Суцільними лініями показані радіальні переміщення, пунктирними – повздовжні. Тут і далі, товстими лініями позначені переміщення для найбільшого з представлених хвильових чисел.

Перша гілка народжується ($k = 0$) як зв'язані електропружні коливання поршневого типу (повздовжні коливання) і переходить до рухів, характерних для поверхневих хвиль Релєєвського типу.

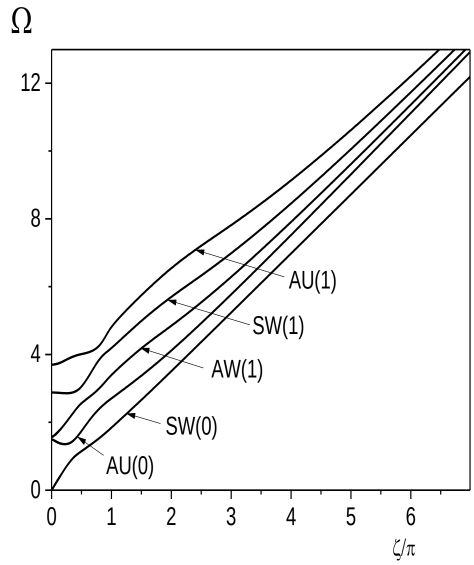

Рисунок 1 — Перші п'ять гілок дисперсійних співвідношень

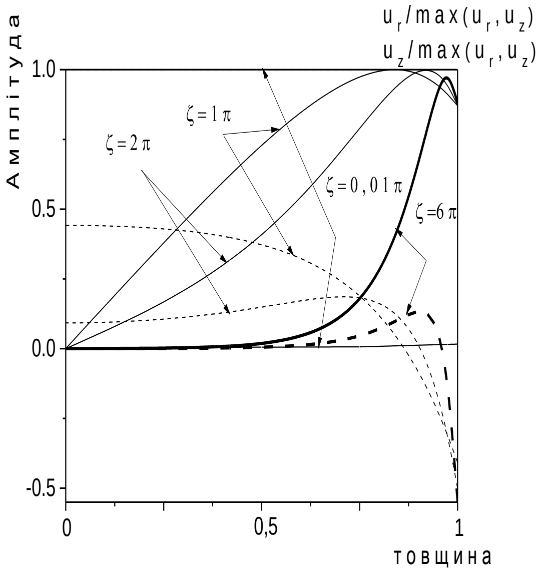

Рисунок 2 — Розподіл переміщень по товщині циліндра для першої гілки $SW(0)$

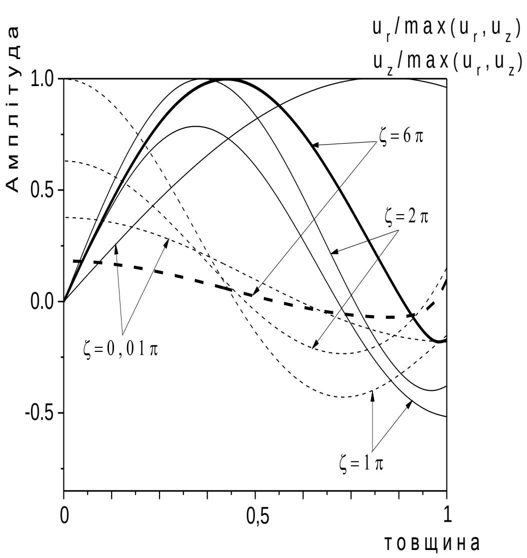

Рисунок 3 — Розподіл переміщень по товщині циліндра для другої гілки $AU(0)$

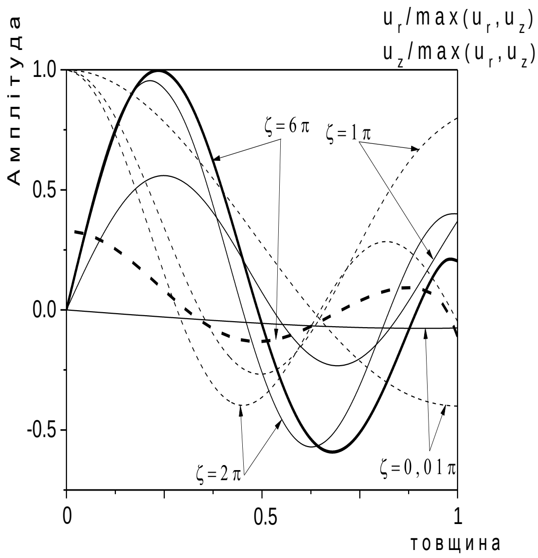

Рисунок 4 — Розподіл переміщень по товщині циліндра для третьої гілки $AW(1)$

Більш високі гілки у коротко хвильовому діапазоні починають поширюватись теж без дисперсії зі швидкістю якоїсь хвилі, назвемо їх хвилями Похгамера-Крі по аналогії з хвилями Лемба для пластини. При цьому у короткохвильовій області зі зростанням номера гілки збільшується на одиницю кількість півхвиль по товщині циліндра. На рис.3 представлено розподіл переміщень по товщині для другої дисперсійної гілки. Народжується даний рух як чисто пружні радіальні коливання. На рис.4 представлено розподіл переміщень по товщині для третьої дисперсійної гілки.

Висновок

Перша гілка $SW(0)$ народжується ($k=0$) як зв'язані електропружні коливання поршневого типу (повздовжні коливання) і переходить до рухів, характерних для поверхневих хвиль Релєевського типу. Наступні гілки у короткохвильовому діапазоні мають переважно радіальні переміщення. Зі зростанням порядкового номеру на одиницю. Збільшується на одиницю кількість півхвиль по товщині циліндра.

Література

1. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder // J. Reine Ungew. Math. – 1876. – 81, № 4. P. 324 – 336.
2. Cree C. Longitudinal vibration of circular bar //Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – 21, № 83/84. – P. 287 – 298.
3. Cree C. The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application //Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Pt III. – P. 250 – 369.
4. Thurston R.N. Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – 64, N 1. – P. 1–37.
5. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах // М.: ИЛ, 1955. – 192с.
6. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах/ Гринченко В.Т., Мелешко В.В. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
7. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР Ин-т механики. – К.: Наук. Думка, 1989. – 280 с.
8. Физическая акустика/ Под редакцией У. Мэзона. Р. Терстона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1 – Т.7, 663 с.
9. Шульга Н.А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами. В Кн.: Успехи механики в 6 – ти томах., 2007. – С. 681 – 702.

Рецензенти:

Гуляєв В.І., д-р техн. наук, Національний транспортний університет.

Марчук О.В., д-р техн. наук, Національний транспортний університет.

Reviewer:

Huliaiev V.I., Dr. Tech. Sci., National Transport University.

Marchuk A.V., Dr. Tech. Sci., National Transport University.

Стаття надійшла до редакції: **30.06.2016 р**.