

Кузло М.Т., канд. техн. наук

## ДЕФОРМАЦІЇ БАГАТОШАРОВОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ ПРИ НАЯВНОСТІ МАСОПЕРЕНОСУ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ ТА ДІЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПОТОКУ

**Анотація.** Отримані розв'язки напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву при наявності масопереносу сольових розчинів та дії фільтраційного потоку.

**Ключові слова:** напруження, переміщення, деформації, фільтрація.

**Аннотация.** Получены решения напряжённо-деформованого состояния многослойного ґрунтового массива при наличии масопереноса солевых растворов та действия фильтрационного потока.

**Ключевые слова:** напряжения, перемещения, деформации, фильтрация.

**Annotation.** The solutions of multilayer soil massif's tensely-deformed state under the existence of salt solutions' mass transfer and action of filtration flow were obtained.

**Key words:** tension, transfer, deformation, filtration.

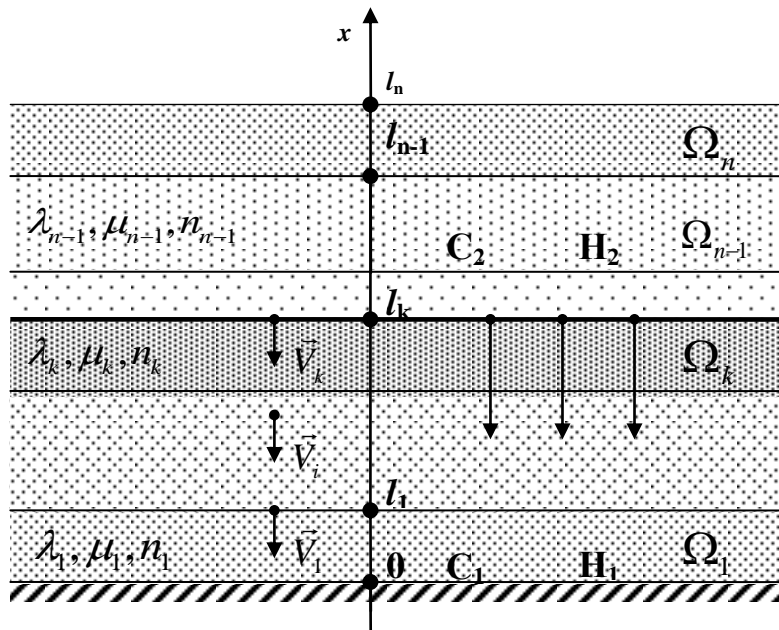
Надійність ґрунтових насипів та штучних споруд на дорогах в значній мірі залежить від вміння правильно оцінити інженерно-геологічні умови ділянки будівництва. При експлуатації даних об'єктів, їх основи можуть зазнавати впливу різних фізико-хімічних процесів: фільтрації підземних вод, масопереносу розчинених солей фільтраційним потоком тощо.

Тому при проектуванні, будівництві та експлуатації споруд особлива увага приділяється дослідженню напружено-деформованому стану (НДС) природних та штучних ґрунтових основ.

Аналіз останніх досліджень показав, що існує ряд теоретичних рішень з визначення НДС ґрунтових масивів [1,2]. Однак, питання з визначення деформацій багат шарового ґрунтового масиву при наявності масопереносу сольових розчинів та дії фільтраційного потоку недостатньо вивчено.

Метою роботи є визначення деформацій багат шарових ґрунтових масивів при наявності масопереносу сольових розчинів та дії фільтраційного потоку і відповідних їм вертикальних зміщень поверхні землі.

Постановка задачі. Нехай дано масив ґрунту, що складається з  $n$  горизонтальних шарів (рис. 1.). У якому, на глибині  $l_k$  відбувається масоперенос сольових розчинів та рух фільтраційного потоку.



**Рисунок 1** – Схема багат шарового ґрунтового масиву при наявності масопереносу сольових розчинів та дії фільтраційного потоку

Кожен з шарів ґрунту характеризується пружними сталими  $\lambda_i, \mu_i, i = \overline{1, n}$ , пористістю  $n_i, i = \overline{1, n}$  та питомою вагою  $\gamma_i, i = \overline{1, n}$ .

На нижній межі ґрунту  $x=0$  задано п'єзометричний напір  $H_1$  та концентрація розчинених у воді солей  $C_1$ , а на глибині  $l_k$  відповідно  $H_2$  та  $C_2$  ( $H_2 > H_1, C_2 > C_1$ ). В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин фільтраційним потоком. При цьому процес фільтрації розчинених у воді речовин підлягає модифікованому закону Дарсі [3].

Математичну модель даної задачі описується рівняннями НДС ґрунтових масивів у переміщеннях, конвективної дифузії розчинених речовин, фільтрації речовин.

Рівняння НДС ґрунтового масиву в переміщеннях записуються у вигляді [4]:

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{d^2 u_i}{dx^2} = X_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^n (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0; \quad (1)$$

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{se,i} + \frac{dp_i}{dx}, & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{np,i}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $\gamma_{se,i}, i = \overline{1, k}$  – питомі ваги ґрунту в  $i$ -ому шарі в зваженому стані;

$\gamma_{np,i}, i = \overline{k+1, n}$  – питомі ваги ґрунту в природному стані;  $p_i, i = \overline{1, k}$  – фільтраційний тиск, який визначається за формулою

$$p_i = \gamma_p (h_i - x), \quad i = \overline{1, k}. \quad (3)$$

У формулі (3)  $h_i, i = \overline{1, k}$  – п'єзометричні напори у відповідних шарах;  $x$  – вертикальна координата;

Запишемо рівняння конвективної дифузії у вигляді:

$$D_i \frac{d^2 c_i}{dx^2} - V_i \frac{dc_i}{dx} - \gamma(c_i - C_*) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4)$$

де  $D_i$  – коефіцієнт конвективної дифузії;  $c_i(x)$  – концентрація розчинених речовин в точці  $x$ ;  $V_i$  – швидкість фільтрації розчину;  $\gamma$  – коефіцієнт масообміну;  $C_*$  – концентрація граничного насичення.

Крайові умови та умови спряження для концентрації мають вигляд:

$$L_1 c_1 = (\alpha_1 c + \beta_1 \frac{dc_1}{dx}) \Big|_{x=0} = C_1, \quad (5)$$

$$c_i(l_i) = c_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (6)$$

$$D_i \frac{dc_i(l_i)}{dx} = D_{i+1} \frac{dc_{i+1}(l_i)}{dx}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (7)$$

$$L_2 c_k = (\alpha_2 c + \beta_2 \frac{dc_k}{dx}) \Big|_{x=l_k} = C_2, \quad (8)$$

де  $L_1 c_1, L_2 c_k$  – оператори, що задають граничні умови для концентрації на вході та на виході фільтраційного потоку.

Задача фільтрації сольових розчинів записується у вигляді рівнянь:

$$V_i = -k(c(x)) \frac{dh_i}{dx}, \quad \frac{dV_i}{dx} = 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (9)$$

$$h_1(0) = H_1, \quad (10)$$

$$h_i(l_i) = h_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (11)$$

$$k(c(l_i)) \frac{dh_i(l_i)}{dx} = k(c(l_i)) \frac{dh_{i+1}(l_i)}{dx}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (12)$$

$$h_k(l_k) = H_2. \quad (13)$$

У формулах (9), (12)  $k(c(x))$  - коефіцієнт фільтрації, що залежить від концентрації сольових розчинів в ґрунті.

Знайдемо розв'язок задачі фільтрації підземних вод, що описується формулами (9)-(13) при  $n=3$ . Використовуючи формули (9), маємо

$$\frac{d\left(k(c(x)) \frac{dh_i}{dx}\right)}{dx} = 0, \quad i=1,2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dh_i}{dx} = \frac{A_i}{k(c(x))}, \quad i=1,2,$$

$$h_i(x) = A_i \int_{l_{i-1}}^x \frac{ds}{k(c(s))} + B_i, \quad i=1,2 \quad (14)$$

Невідомі коефіцієнти в (14) знаходимо, використовуючи крайові умови (10), (13) та умови спряження (11), (12)

$$B_1 = H_1, \quad (15)$$

$$A_1 = A_2 = A = \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}}, \quad (16)$$

$$B_2 = H_2 - \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}} \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}. \quad (17)$$

Враховуючи (16), отримаємо

$$\frac{dh_i}{dx} = \frac{1}{k(c(x))} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}}, \quad i=1,2. \quad (18)$$

Визначимо швидкість фільтрації за допомогою формул (9)

$$V_i = -A, \quad i=1,2,$$

$$V_i = V = \frac{H_1 - H_2}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}}, \quad i=1,2. \quad (19)$$

Знайдемо  $\frac{dp_i}{dx}$ ,  $i=1,2$  використовуючи формулу (3)

$$\frac{dp_i}{dx} = \gamma_p \cdot \left( \frac{1}{k(c(x))} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}} - 1 \right), \quad i=1,2, \quad x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0.$$

Таким чином

$$X_i = \gamma_{зв.i} + \gamma_{р.} \left( \frac{1}{k(c(x))} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}} - 1 \right), i = 1, 2. \quad (20)$$

Знайдемо розв'язок задачі масопереносу солей, що описуються формулами (5)-(8) при  $\gamma = 0$

$$\frac{d^2 c_i}{dx^2} - \frac{V}{D_i} \frac{dc_i}{dx} = 0, i = 1, 2. \quad (21)$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda_i^2 + \frac{V}{D_i} \lambda_i = 0, i = 1, 2$$

і знайдемо його розв'язки

$$\lambda_i^1 = 0, \lambda_i^2 = -\frac{V}{D_i}, i = 1, 2. \quad (22)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (21) має вигляд

$$c_i(x) = b_{2i-1} e^{\lambda_i^1 x} + b_{2i} e^{\lambda_i^2 x}, i = 1, 2. \quad (23)$$

Підставивши значення (22) в (23), отримаємо

$$c_i(x) = b_{2i-1} + b_{2i} e^{-\frac{V}{D_i} x}, i = 1, 2. \quad (24)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $b_{2i-1}, b_{2i}, i = 1, 2$  використовуємо крайові умови (5), (8) та умови спряження (6), (7). У випадку, коли  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  та  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , отримаємо

$$b_2 = \frac{C_2 - C_1}{e^{\frac{V}{D_1} l_1 + \frac{V}{D_2} (l_2 - l_1)} - 1}, \quad (25)$$

$$b_1 = b_3 = C_1 - b_2, \quad (26)$$

$$b_4 = b_2 e^{l_1 \frac{V}{D_1} - l_2 \frac{V}{D_2}}. \quad (27)$$

Побудуємо математичну модель НДС ґрунту у безрозмірних змінних. Для цього розглянемо масив ґрунту, що складається з двох шарів та вільною поверхнею на висоті  $l_2$ . Знайдемо розв'язок задачі при наявності переміщення на поверні землі.

Перейдемо у (1)-(13) до безрозмірних величин згідно формул (рисочки над безрозмірними змінними опустимо):

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{\bar{k}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{l_0}, \quad \bar{a}_i = a_i \cdot l_0, \quad i = \bar{1}, \bar{3},$$

$$\bar{c}_i = \frac{c_i}{C_*}, \quad \bar{D}_i = \frac{D_i}{l_0 \bar{k}}, \quad \bar{a}'_i = a'_i \cdot l_0, \quad \bar{l}_i = \frac{l_i}{l_0}, \quad \bar{h}_i = \frac{h_i}{l_0}, \quad \bar{p}_i = \frac{p_i}{l_0}, \quad i = 1, 2,$$

де  $\bar{l} < 1$  для будь-якого  $t > 0$ .

Враховуємо, що  $l(t) \leq l_0$ ,  $l(t) - l_0 = u_3(l(t))$ ,  $l(0) = l_0$ .

Математична модель НДС ґрунту запишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = a_i + a'_i \cdot \frac{1}{k(c(x))}, \quad i = 1, 2, \quad x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d^2 u_3}{dx^2} = a_3, \quad x \in (l_2, l), \quad (29)$$

$$\text{де } a_i = \frac{\gamma_{se.i} - \gamma_p}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad a'_i = \frac{\gamma_p \cdot (H_2 - H_1)}{(\lambda_i + 2\mu_i) \int_0^{l_2} \frac{ds}{k(c(s))}}, \quad i = 1, 2, \quad a_3 = \frac{\gamma_{np.}}{\lambda_3 + 2\mu_3}.$$

Розглядуємо випадок, коли крайові умови для переміщень мають вигляд

$$u_i(0) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{du_3(l)}{dx} = 0 \quad (31)$$

і означають наявність переміщення верхньої межі ґрунту.

Умови спряження запишуться наступним чином:

$$u_i(l_i) = u_{i+1}(l_i), \quad i = \bar{1}, \bar{3}, \quad (32)$$

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{du_i(l_i)}{dx} = (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}) \frac{du_{i+1}(l_i)}{dx}, \quad i = \bar{1}, \bar{3}. \quad (33)$$

Загальний розв'язок (28), (29) прийме вигляд:

$$u_i(x) = \frac{a_i x^2}{2} + a'_i \int_{l_{i-1}}^x \left( \int_{l_{i-1}}^z \frac{ds}{k(c(s))} \right) dz + c_{2i-1} x + c_{2i}, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$$u_3(x) = \frac{a_3 x^2}{2} + c_5 x + c_6, \quad (35)$$

$$\text{де } c_2 = 0, \quad (36)$$

$$c_5 = -a_3 l, \quad (37)$$

$$c_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} (a_2 l_1 + c_3) - a_1 l_1 - a'_1 \int_0^{l_1} \frac{dz}{k(c(z))}, \quad (38)$$

$$c_3 = \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2 + c_5) - a_2 l_2 - a'_2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(c(z))}, \quad (39)$$

$$c_4 = \frac{a_1 - a_2}{2} l_1^2 + a'_1 \int_0^{l_1} \left( \int_0^z \frac{ds}{k(c(s))} \right) dz + l_1 (c_1 - c_3), \quad (40)$$

$$c_6 = \frac{a_2 - a_3}{2} l_2^2 + a'_2 \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_{l_1}^z \frac{ds}{k(c(s))} \right) dz + l_2(c_3 - c_5) + c_4. \quad (41)$$

Величина деформації обчислюється за формулами:

$$\varepsilon_i(x) = a_i x + a'_i \int_{l_{i-1}}^x \frac{dz}{k(c(z))} + c_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \quad x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0, \quad (42)$$

$$\varepsilon_3(x) = a_3 x + c_5, \quad x \in (l_2, l). \quad (43)$$

Формули з визначення напруження матимуть вигляд:

$$\sigma_i(x) = (\lambda_i + 2\mu_i) \left( a_i x + a'_i \int_{l_{i-1}}^x \frac{dz}{k(c(z))} + c_{2i-1} \right), \quad (44)$$

$$i = 1, 2, \quad x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0,$$

$$\sigma_3(x) = (\lambda_3 + 2\mu_3)(a_3 x + c_5), \quad x \in (l_2, l). \quad (45)$$

Таким чином, задача НДС багатошарового ґрунтового масиву при наявності масопереносу сольових розчинів та дії фільтраційного потоку дається формулами (28)-(45).

Зазначимо, що у зв'язку із тим, що відбувається переміщення верхньої межі ґрунту  $\left( \frac{du_3(l)}{dx} = 0 \right)$ , то відповідно спостерігається її осідання, що визначається за формулою:

$$l(t) - l_0 = u_3(l(t)). \quad (46)$$

Використовуючи формулу (35), маємо

$$u_3(l(t)) = \frac{a_3 l^2(t)}{2} + c_5 l(t) + c_6, \quad (47)$$

де коефіцієнти  $c_5$  і  $c_6$  визначаються згідно формул (37) і (41).

Підставивши значення (34) і (41) у формулу (47), а (47) у (46), після певних перетворень отримаємо

$$\frac{a_3}{2} l^2(t) + b_1 \cdot l(t) + b_2 = 0, \quad (48)$$

$$\text{де} \quad b_1 = \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_3 l_1 + \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2 - a_3 l_1) - a_3 l_2 + 1, \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
b_2 = & \frac{a_1 + a_2}{2} l_1^2 + \frac{a_2 + a_3}{2} l_2^2 - a_2 l_1 l_2 - \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_3 l_1 l_2 - \\
& - \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left( a_2 l_1^2 - a_2 l_1 l_2 - a_2' \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(c(z))} \right) - \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2^2 - a_3 l_1 l_2) + \\
& + a_1' l_1 \int_0^{l_1} \frac{dz}{k(c(z))} + a_2' (l_2 - l_1) \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(c(z))} - a_1' \int_0^{l_1} \left( \int_0^z \frac{ds}{k(c(s))} \right) dz - a_2' \int_{l_1}^{l_2} \left( \int_{l_1}^z \frac{ds}{k(c(s))} \right) dz - l_0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (48) відносно змінної  $l(t)$ , отримаємо

$$l(t) = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 2a_3 b_2}}{a_3}, \tag{51}$$

де  $b_1$  і  $b_2$  визначаються за формулами (49), (50).

Нижче наведені результати числових розрахунків задачі НДС ґрунтового масиву з рухомою верхньою межею при наявності масоперенесення сольових розчинів при наступних вхідних даних:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = 7500 \text{ кг/м}^2; \lambda_2 = 13500 \text{ кг/м}^2; \lambda_3 = 17000 \text{ кг/м}^2; \mu_1 = 5000 \text{ кг/м}^2; \\
\mu_2 = 9000 \text{ кг/м}^2; \mu_3 = 11500 \text{ кг/м}^2; \gamma_{\text{зв.1}} = 11,5 \text{ кг/м}^3; \gamma_{\text{зв.2}} = 10,5 \text{ кг/м}^3; \gamma_{\text{нр.}} = 17,0 \\
\text{кг/м}^3; l_1 = 0,3 \text{ м}; l_2 = 0,7 \text{ м}; l_0 = 1 \text{ м}; H_1 = 0,05 \text{ м}; H_2 = 0,65 \text{ м}; C_1 = 0 \text{ г/л}; C_2 = 350 \\
\text{г/л}; D_1 = 0,02 \text{ м}^2/\text{доба}; D_2 = 0,015 \text{ м}^2/\text{доба}.
\end{aligned}$$

Коефіцієнт фільтрації залежить від концентрації сольового розчину:

$$k(c) = a_5' \cdot c^5 + a_4' \cdot c^4 + a_3' \cdot c^3 + a_2' \cdot c^2 + a_1' \cdot c + a_0',$$

де  $a_5' = 5,9404 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_4' = -1,6703 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_3' = 1,7051 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_2' = -7,4311 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_1' = 1,0563 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_0' = 1,0054 \cdot 10^{-3}$ ,  $c \in [0,1]$  - безрозмірна величина.

За формулою (51) знаходимо значення  $l \approx 0,98958 \text{ м}$ .

Результати розрахунку значення переміщень, деформацій та напружень наведено в таблиці 1.

Графіки розподілу переміщень, деформацій та напружень по глибині ґрунту наведені відповідно на рис.2, 3 та 4.

Червоний колір – графік НДС ґрунтового масиву при наявності масопереносу сольових розчинів;

синій колір – значення НДС масиву ґрунту при наявності фільтрації розчинених речовин з вільної поверхні;

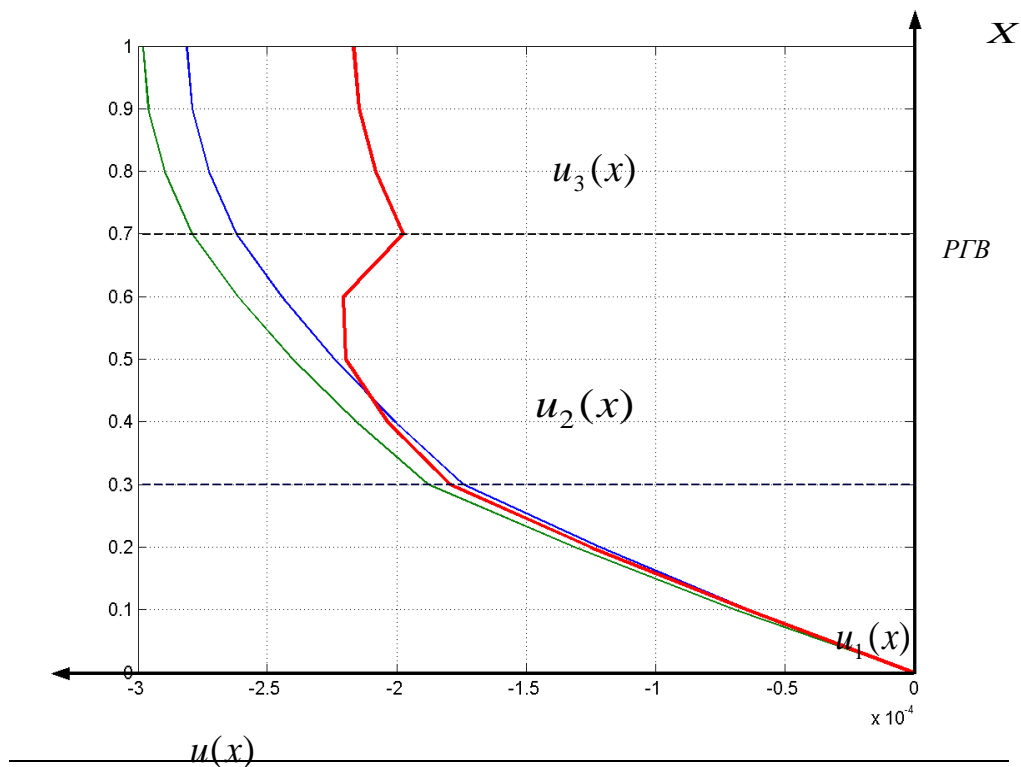
зелений колір – значення НДС масиву ґрунту без фільтрації з вільної поверхні.



**Таблиця 1** – Значення переміщень, деформацій та напружень.

	$x$	$u(x), \times 10^{-4}$	$\varepsilon(x), \times 10^{-4}$	$\sigma(x)$
	0	0	-6,62452	-11,59291
	0,1	-0,64277	-6,39921	-11,19862
	0,2	-1,24801	-6,18291	-10,82010
	0,3	-1,79217	-5,88817	-10,30430
Ґрунт в зваженому стані	0,3	-1,79217	-3,27121	-10,30430
	0,4	-2,03353	-3,04291	-9,58518
	0,5	-2,19563	-2,74426	-8,64442
	0,6	-2,20619	-2,28992	-7,21326
	0,7	-1,97431	-1,61680	-5,09291
Ґрунт в природному стані	0,7	-1,97431	-1,27323	-5,09291
	0,8	-2,08038	-0,84823	-3,39291
	0,9	-2,14395	-0,423228	-1,69291
	1	-2,16503	0,00177	0,00709

Як бачимо з отриманих результатів, процес масопереносу сольових розчинів суттєво впливає на зміну напружено-деформованого стану ґрунту.



**Рисунок 2** – Графік розподілу переміщень

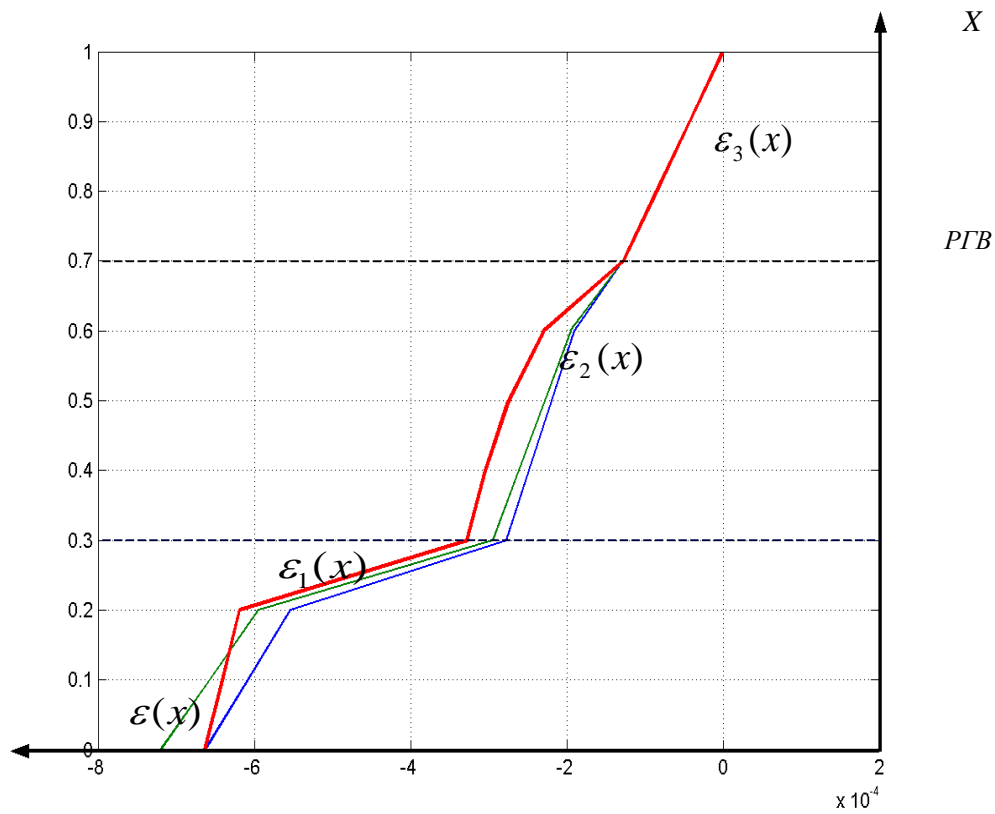


Рисунок 3 – Графік розподілу деформацій

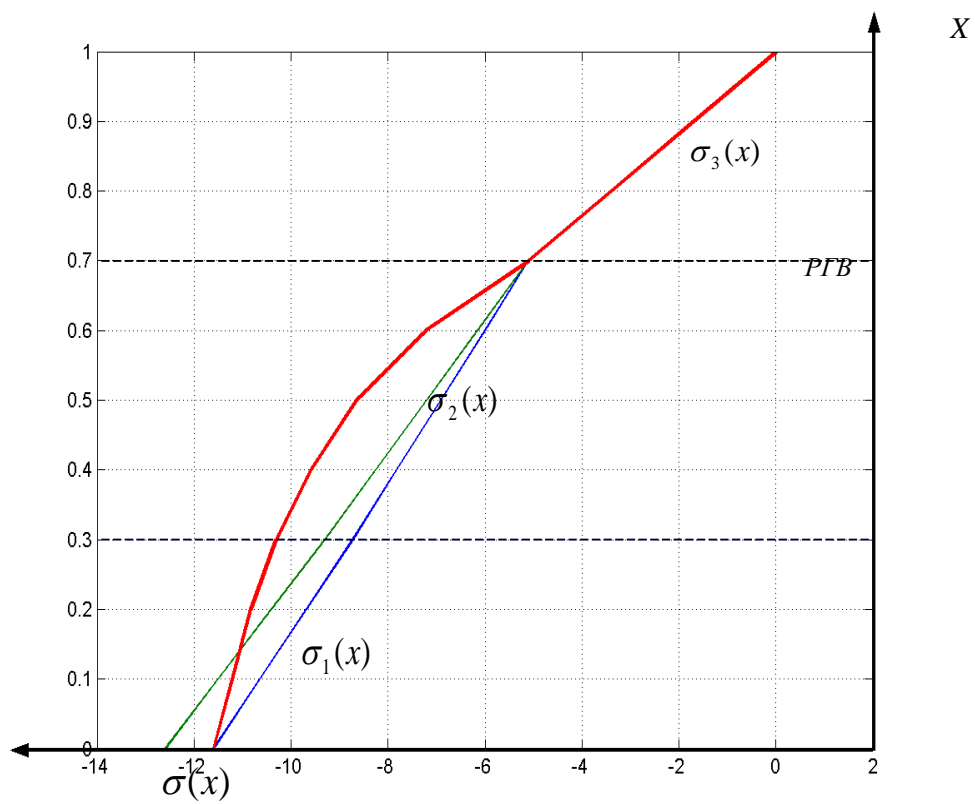


Рисунок 4 – Графік розподілу напружень

## Висновок

Отримані розв'язки дають можливість визначити вертикальні зміщення поверхні ґрунтового масиву при наявності масопереносу сольових розчинів та дії фільтраційного потоку. Отримані теоретичні залежності підтверджені на конкретному прикладі. Подальшими дослідженнями можуть бути отримання відповідних розв'язків для випадку, коли рівень ґрунтових вод змінюється.

## Література

1. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432с.
2. Власюк А. П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в умовах масо перенесення / А. П. Власюк, Є. І. Катерина // Вісник Львівського університету. Сер. прикладна математика та інформатика, 1999. Вип.1. С.50 – 55.
3. Кузло М. Т. Моделювання руху сольових розчинів у ґрунтах / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник НУВГП: Зб. наук. праць. – Вип.4 (36) – Рівне, 2006. – С.131 – 135.
4. Кузло М. Т. Оцінка напружено-деформованого стану багатошарового ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку води // Комунальне господарство міст: Наук. техн. зб. Вип. 105. - Харків, 2012. – С.232 – 241.