

**В.О. МІЛЕЙКОВСЬКИЙ**, канд. техн. наук.

## **ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗШИРЕННЯ ТА ЗАТУХАННЯ ПЛОСКИХ НАПІВ ОБМЕЖЕНИХ СТРУМИН**

*Запропоновано підхід до визначення темпу розширення та затухання затоплених напівобмежених струмін на підставі геометричного аналізу макроструктури струминного примежового шару без залучення дослідних даних. Висловлені припущення дозволять оцінювати темп розширення і затухання складних струминних течій, що насталяються на поверхні.*

*Предложен поход к определению темпа расширения и затухания затопленных полуограниченных струй путём геометрического анализа макроструктуры струйного пограничного слоя без использования экспериментальных данных. Принятые предположения позволят оценивать темп расширения и затухания сложных струйных течений, насталяющихся на поверхности.*

*The approach to calculation of rate of expansion and decay of submerged semibounded jet is offered using the geometrical analysis of a macrostructure of a jet boundary layer without use of experimental data. The accepted assumptions will allow obtaining rate of expansion and decay of the complex jet flows on the surfaces.*

У санітарно-технічних системах використовуються затоплені струмини, які насталяються на поверхні. Для розгляду струмін зручно користуватися джерелом Толміна – струминою, випущеною з нескінченно малого отвору або щілини. Розширення та затухання струмін є одними з важливих факторів, що визначають ефективність роботи систем. Їх прийнято розглядати як результат дії турбулентних пульсацій у струминному примежовому шарі та у навколишньому середовищі (при розвитку струмини в потоку). Математичний опис струминних течій передбачає дослідні коефіцієнти. Це призводить до потреби у складних експериментальних дослідженнях, що негативно впливає на собівартість обладнання.

На відміну від цих підходів професор кафедри теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури А.Я.Ткачук [1] розробив теорію турбулентних примежових шарів за методом особливостей. Потік розглядається як течія ідеальної рідини, в якій присутні «особливості» – дрібні вихрові течії. При цьому безпосередньо описується дія вихорів замість уведення додаткових понять.

Продовженням цих досліджень є аналітичний опис струминних течій як сукупність великомасштабних вихорів – клубів. Вільні та напівобмежені струмини [2, 3, 4, 5] подаються як клуби що котяться (рис. 1) вільною межею (ВМ). У роботі [2] показано, що у вільних струминах (рис. 1,а) клуби розташовуються у шаховому порядку з зануренням клубів глибше осі струмини. Між клубами формується міжклубний шар. Напівобмежені струмини прийнято ділити [6] лінією максимальних швидкостей (ЛМШ) на пристінний

примежовий шар (аналогічний до обтікання потоком пластини) біля поверхні настилання (ПН) та струминний з зовнішнього боку (аналогічний до вільних струмин). З урахуванням властивості клубів занурюватися глибше осі (ЛМШ) ця схема має бути ускладнена (рис. 1,б). Якщо сполучити найближчі до поверхні настилання (ПН) точки клубів, то отримаємо лінію розділу (ЛР). Нижче її маємо суто пристінний примежовий шар без великомасштабних утворень. Між ЛМШ та ЛР маємо взаємодію шарів. Між ЛР та ВМ маємо струминний примежовий шар. Позначимо  $\beta$  ( $\text{tg}(\beta) = \Theta$ ) – кут розширення струмини між ВМ та ПН. Прийнемо кут між ПН та лінією ЛЦ, що сполучає центри клубів,

клубів, –  
 $\beta_{\text{ЛЦ}}$  ( $\text{tg}(\beta_{\text{ЛЦ}}) = \Theta_{\text{ЛЦ}}$ ). Позначимо кут між ЛМШ та ПН –  
 $\beta_{\text{ЛМШ}}$  ( $\text{tg}(\beta_{\text{ЛМШ}}) = \Theta_{\text{ЛМШ}}$ ). Прийнемо кут між ЛР та ПН –  $\beta_{\text{ЛР}}$  ( $\text{tg}(\beta_{\text{ЛР}}) = \Theta_{\text{ЛР}}$ ).

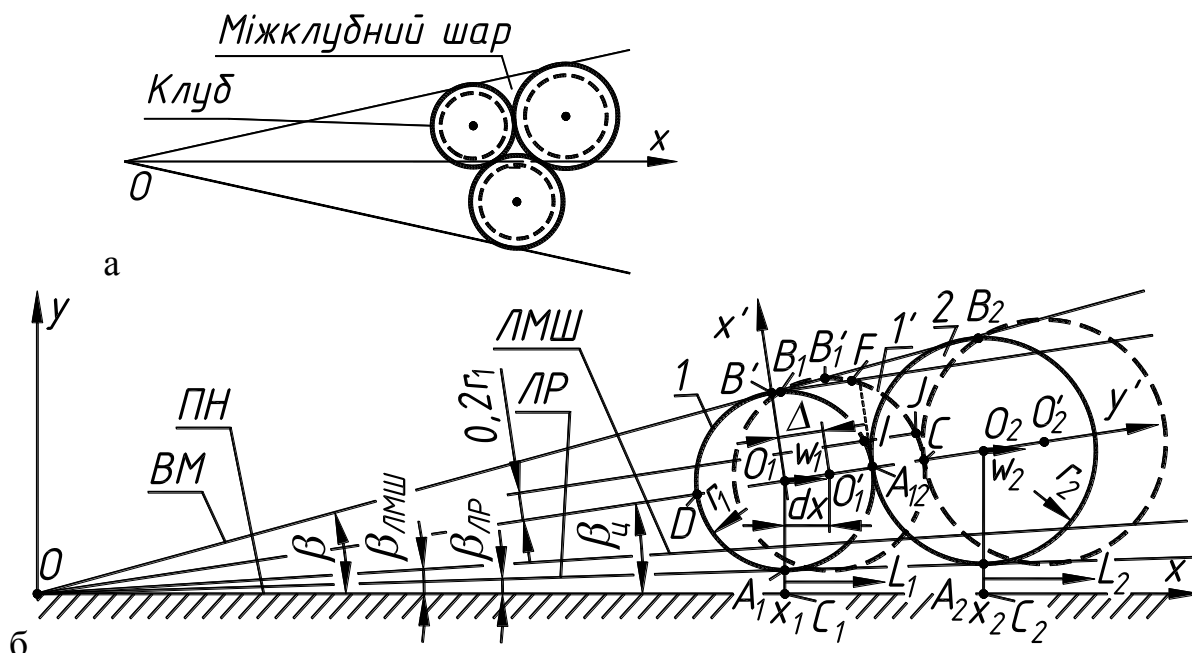


рис. 1. Схема джерел Толміна: а – вільного, б – напівобмеженого.

Для спрощення цієї схеми можна [3] використати гіпотезу І.А.Шепелева про вилучення з розгляду пристінного шару і вважати, що ЛР збігається з ПН, а  $\beta_{\text{ЛР}} = \Theta_{\text{ЛР}} = 0$ .

Зв'язок між тангенсами кутів:

$$\Theta_{\text{ЛЦ}} = (\Theta + \Theta_{\text{ЛР}})/2. \tag{1}$$

Розглянемо джерело Толміна, яке витікає з нескінченно тонкої щілини у точці  $O$  у напрямку осі  $x$ , що збігається з ПН. Вісь  $y$  проходить через точку  $O$  перпендикулярно до осі  $x$ . Виділимо клуби 1 та 2 радіусами  $r_1$  та  $r_2$ . Осі клубів позначимо  $O_1(x_1, y_1)$  та  $O_2(x_2, y_2)$ . Найближчі до осі  $x$  точки клубів позначимо  $A_1$  та  $A_2$ . Найбільш віддалені від осі  $x$  точки клубів –  $B_1$  та  $B_2$ . Точка торкання клубів –  $A_{12}$ . Точки  $C_1$  та  $C_2$  є точками перетину ліній  $O_1A_1$  та  $O_2A_2$  з ПН. Ці лінії за побудовою перпендикулярні до ПН. Осі  $O_1$  та  $O_2$  клубів 1 та 2 рухаються в

напрямку осі  $x$  зі швидкостями  $w_1$  та  $w_2$ . Оскільки клуби збільшують радіуси на  $dr_i$ , то їхні центри також віддаляються від осі  $x$ . За час  $dt$  центри клубів  $O_i$  зсунуться у точки  $O'_i$  на відстань вздовж осі струмини  $x$ :

$$dx_i = w_i dt, \quad (2)$$

Клуб 1 займе положення  $1'$ , а клуб 2 –  $2'$ . У криволінійному трикутнику  $B_1A_{12}B_2$  відбувається лише підтікання повітря до струмини у напрямку, перпендикулярному до осі  $x$  [4]. А це можливе лише якщо як мінімум все повітря криволінійної фігури  $B_1B'_1CA_{12}$  ( $B'_1$  – найбільш віддалена від осі  $x$  точка кола  $1'$ ,  $B'_1C$  – відрізок прямої) буде спожито струминою. Якщо спожито менше, то клуб 1 буде або створювати рух повітря в напрямку осі  $x$ , або виштовхувати його зі струмини, що суперечить фізичному змісту задачі.

У околиці точки  $A_{12}$  відбувається звуження потоку, що підтікає до криволінійного трикутника  $A_1A_{12}A_2$ . У даному місці має суттєво зрости швидкість у напрямку до осі  $x$ . Рух на периферії клуба відбувається проти напрямку підтікання. Тому ежекція в цій околиці ускладнена. Це – околиця ускладненого підтікання  $IJCA_{12}$ . Оскільки ширина міжклубного шару тут незначна, то наявність повздовжньої складової швидкості не вплине на усереднену швидкість. Тому слід вилучити з розгляду частину  $IJCA_{12}$  фігури  $B_1B'_1CA_{12}$  біля точки  $A_{12}$ , в якій ширина міжклубного шару незначна.

Площа  $A_c$  розглянутої фігури  $B_1B'_1CA_{12}$  визначається з урахуванням багатьох факторів. Але якщо  $dt \rightarrow 0$ , то площа  $A_c$  стає теж нескінченно малою, як і приріст радіуса  $dr_1$ . Введемо систему декартових координат  $x'y'$  з центром у точці  $O_1$ , а вісь  $y'$  збігається з ЛЦ.

Якщо клуб збільшує радіус  $r_1$  лінійно відносно  $x$ , то нескінченно малі величини  $dr_1$  та  $dx_1$  мають один порядок малості, як і довжина  $\Delta = dx_1 / \cos(\beta_{\text{ЛЦ}})$  відрізка  $OO'$ . Існує можливість вилучити малі частини цієї площі вищого порядку малості і знайти похідну  $dA_c/dt$ . Криволінійний трикутник  $B_1B'_1F$  ( $B_1B'_1$  – відрізок прямої,  $B'_1F$  – дуга,  $B_1F \parallel y'$ ) при стягуванні в точку прямує до звичайного трикутника, а площа його прямує до половини добутку довжини відрізка  $B_1F$  та висоти, опущеної з точки  $B'_1$ . Оскільки обидві величини мають порядок малості не нижчий за  $dx_1$ , то їхній добуток має вищий порядок малості і може бути вилучений з розгляду. Вилучимо з розгляду мікроскопічну фігуру, яка на рис. 1,б зливається з відрізком  $B_1B'$  ( $B'$  – точка перетину осі  $x'$  та межі клуба 1). Тоді площа  $A_c$  буде замінена площею  $A_0$  фігури  $B'FCA_{12}$ .

У вільних струминах клуби, що рухаються, обтікаються навколишнім повітрям. У «завітряній» частині  $B'D$  виникає розрідження у порівнянні з клубом, яке було проаналізоване у роботі [7]. Це розрідження не може бути вимірне, але його достатньо щоб ускладнити ежекцію до клуба. У напівобмежених струминах поверхня настилання обмежує ежекцію повітря. Це призводить до появи на ній розрідження, більшого ніж на лінії  $B'D$ . Це розрідження на плоских поверхнях практично не піддається вимірюванню, а на опуклих поверхнях стає сумірним з динамічним тиском потоку. Тому вплив

різниці умов підтікання на лініях  $B'A_{12}$  та  $B'D$  нівелюється. Отже, площа  $A_0$  має бути продовжена назад до точки  $D$ , тобто врахована двічі.

Тепер вилучимо околицю ускладненого підтікання біля точки  $A_{12}$ . Рівняння кола  $y' = (r_1^2 - x'^2)^{1/2}$  при  $x' = 0,2r_1$  дає значення відстані між дотичною (на рис. 1 показана коротким пунктиром) та колом  $r_1 - y' = 0,02r_1$  або 2% від  $r_1$ . Ця відстань незначна, а  $x' = 0,2$  можна використати як оціночне значення межі околиці ускладненої ежекції.

Площа криволінійної фігури  $B'FJI$  після вилучення околиці ускладненого підтікання  $IJCA_{12}$ :

$$dA_0 = 2 \left( \int_{0,2r_1}^{r_1} \Delta + \sqrt{(r_1 + dr_1)^2 - x'^2} dx' - \int_{0,2r_1}^{r_1} \sqrt{r^2 - x'^2} dx' \right) \quad (3)$$

Після взяття інтегралів та спрощення сум скінченних і нескінченно малих величин:

$$dA_c = 2dA_0 = 2 \cdot 0,8\Delta r_1 = \frac{1,6r_1 dx_1}{\cos(\beta_{\text{ЛЦ}})} = 1,6r_1 \sqrt{1 + \left( \frac{\Theta + \Theta_{\text{ЛР}}}{2} \right)^2} dx_1 \quad (4)$$

Спожите повітря йде на зростання площі  $A_k$  клуба 1:

$$dA_k = 2\pi r_1 dr_1, \quad (5)$$

зростання площі  $A_{k.ф.}$  криволінійної фігури  $C_1A_1A_{12}A_2C_2$  та зростання витрати у пристінному шарі під ЛР:

$$dA_L = (L_2 - L_1)dt, \quad (6)$$

де  $L_1$  та  $L_2$  – питома витрата на один метр глибини (перпендикулярно площині рис. 1) у перерізах, відповідно,  $A_1C_1$  та  $A_2C_2$ , м<sup>2</sup>/с.

Баланс виражається рівнянням:

$$dA_c = dA_k + dA_{k.т.} + dA_L, \quad (7)$$

Визначимо  $L_1$  та  $L_2$  з урахуванням подібності [3] профілів швидкості:

$$L_i = \int_0^{|A_iC_i|} u dy = K_{\text{ЛР}} w_i |A_iC_i| = K_{\text{ЛР}} \Theta_{\text{ЛР}} w_i x_i, \quad (8)$$

де  $u$  – швидкість повітря у довільній точці перерізу,  $|A_iC_i|$  – довжина відрізка  $A_iC_i$ , а константа

$$K_{\text{ЛР}} = \int_0^{|A_iC_i|} u dy / w_i |A_iC_i| = \text{const} \quad (9)$$

визначається інтегруванням профілю швидкості за роботами [3] та [5].

Рівняння (6) після перетворень з урахуванням формул (2) і (8):

$$dA_L = K_{ЛР} \Theta_{ЛР} (x_2 w_2 - x_1 w_1) d\tau = K_{ЛР} \Theta_{ЛР} (x_2 (dx_2/d\tau) d\tau - x_1 (dx_1/d\tau) d\tau)$$

$$dA_L = K_{ЛР} \Theta_{ЛР} (x_2 dx_2 - x_1 dx_1) \quad (10)$$

Площа  $A_{к.ф.}$  є різницею площі  $A_{тр}$  трапеції  $C_1 O_1 O_2 C_2$  та площі  $A_{сек}$  секторів клубів 1 та 2, обмежених цією трапецією. Площа трапеції:

$$A_{тр} = (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)/2 = \Theta(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)/2, \quad (11)$$

Кути трапеції:

$$\angle A_1 O_1 O_2 = (\pi/2) + \beta_{ЛЦ}, \quad \angle O_1 O_2 A_2 = (\pi/2) - \beta_{ЛЦ} \quad (12)$$

За відомими кутами (12) та за рівнянням (11) площа криволінійної фігури  $C_1 A_1 A_2 C_2$ :

$$A_{к.ф.} = \frac{\Theta(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} - \frac{r_1^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \beta_{ЛЦ} \right) - \frac{r_2^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_{ЛЦ} \right). \quad (13)$$

Виразимо радіуси клубів  $r_1$  та  $r_2$ :

$$r_1 = |O_1 B_1| = x_1(\Theta - \Theta_{ЛР})/2; \quad r_2 = |O_2 B_2| = x_2(\Theta - \Theta_{ЛР})/2. \quad (14)$$

Запишемо довжину проекції відрізка  $O_1 O_2$  на вісь  $x$ :

$$(r_1 + r_2) \cos(\beta_{ЛЦ}) = x_2 - x_1,$$

звідки з урахуванням формул маємо:

$$x_2 = x_1 \frac{\sqrt{4 + (\Theta + \Theta_{ЛР})^2} + (\Theta - \Theta_{ЛР})}{\sqrt{4 + (\Theta + \Theta_{ЛР})^2} - (\Theta - \Theta_{ЛР})}. \quad (15)$$

Рівняння (4), (5), (10) та (13) з урахуванням залежностей (14) і (15) набудуть вигляду, відповідно,

$$dA_c \rightarrow dA_0 = 0,8(\Theta - \Theta_{ЛР})\sqrt{1 + \left(\frac{\Theta + \Theta_{ЛР}}{2}\right)^2} x_1 dx_1 \quad (16)$$

$$A_{к.ф.} = \Theta(\Theta - \Theta_{ЛР})\theta_{к.ф.}(\Theta) x_1^2, \quad (17)$$

$$dA_L = K_{ЛР}\Theta(\Theta - \Theta_{ЛР})\theta_L(\Theta)x_1 dx \quad (18)$$

$$dA_k = \pi(\Theta - \Theta_{ЛР})^2 x_1 dx_1 / 2, \quad (19)$$

де функції  $\theta_{к.ф.}(\Theta)$  та  $\theta_L(\Theta)$  залежать лише від  $\Theta$ :

$$\theta_{к.ф.} = \frac{1}{4\left(\sqrt{4 + \Theta^2(1 + \theta_{ЛР})^2} - \Theta(1 - \theta_{ЛР})\right)^2} \times$$

$$\times \left( 8\sqrt{4 + \Theta^2(1 + \theta_{ЛР})^2} - \left( \pi\left((1 + \theta_{ЛР}^2)\Theta^2 + 2\right) - \right. \right. \quad (20)$$

$$\left. \left. - 2\sqrt{4 + \Theta^2(1 + \theta_{ЛР})^2}\Theta \arctg\left(\Theta \frac{1 + \theta_{ЛР}}{2}\right)(1 - \theta_{ЛР}) \right) (1 - \theta_{ЛР}) \right)$$

а відношення тангенсів характерних кутів (відношення характерних розмірів перерізів)  $\theta_{ЛР} = \Theta_{ЛР}/\Theta$  є константою [3], [5] струмини.

Приріст площі криволінійної фігури за формулою(17):

$$dA_{к.ф.} = 2(\Theta - \Theta_{ЛР})\theta_{к.ф.}(\Theta) x_1 dx_1. \quad (21)$$

Тоді за рівняннями(7), (16), (18), (19)та (22) маємо:

$$0,8(\Theta - \Theta_{ЛР})\sqrt{1 + \left(\frac{\Theta + \Theta_{ЛР}}{2}\right)^2} x_1 dx_1 = \frac{\pi}{2}(\Theta - \Theta_{ЛР})^2 x_1 dx_1 +$$

$$+ 2\Theta(\Theta - \Theta_{ЛР})\theta_{к.ф.}(\Theta)x_1 dx_1 + K_{ЛР}\Theta(\Theta - \Theta_{ЛР})\theta_L(\Theta)x_1 dx_1.$$

Після перетворень:

$$\Theta = \frac{8}{\sqrt{25(\pi(1 - \theta_{LP}) + 4\theta_{к.ф.}(\Theta) + 2K_{LP}\theta_L(\Theta))^2 - 16(1 + \theta_{LP})^2}} \quad (22)$$

Рівняння (23) розв'язується чисельно (табл. 1).

Таблиця 1. Значення параметрів струмини

Параметр	Значення	
	без використання гіпотези Шепелева	з використанням гіпотези Шепелева
$\theta_{LP} = \Theta_{LP}/\Theta$ за [3] і [5]	0,0461	0,0
КЛР за [3] і [5] і залежністю(9):	1,8455	0,0
Значення $\Theta$ за рівнянням (23)	0,2445	0,2562
Похибка $100(\Theta - \Theta_{досл})/\Theta_{досл}$ , %	1,0	5,9

При використанні простих ітерацій при початковому наближенні  $\Theta = 0$  або  $\Theta = 1$  на п'ятій ітерації отримуємо чотири точних знаки після коми. Значення  $\Theta$  без використання гіпотези І.А.Шепелева повторює з точністю до другого знаку загальноприйняте [6]  $\Theta_{досл} = 0,22 \cdot 1,1 = 0,242$  (якщо це значення прийняти як перше наближення, достатньо 2-3 ітерації). Похибка використання гіпотези І.А.Шепелева становить 6%. Отже, отримані дані свідчать про прийнятність висловлених припущень.

Чим більше розширення струмини, тим швидше її затухання, більші витрати енергії на підживлення. Тому це мінімальне значення  $\Theta \approx 0,24$  встановлюється при випуску струмини біля плоскої поверхні. Отже, без залучення дослідних даних отримано одну з фундаментальних констант напівобмежених струмин – тангенс кута розширення. З використанням закону збереження кількості руху, який тотожний закону збереження моменту кількості руху клубів, отримуємо темп затухання струмини. Цей аналіз не наведений, оскільки він добре висвітлений у літературних джерелах (наприклад, [6]) і у контексті даних викладок залишається без змін. У подальшому проведений аналіз буде розповсюджений на складні струмини, в т.ч., криволінійні напівобмежені.

## Висновки

Висловлені припущення щодо мінімально можливого споживання навколишнього повітря струминою дозволили отримати кут розширення плоскої напівобмеженої струмини без використання експериментальних даних. Незначна розбіжність між отриманими даними та даними відомих досліджень підтверджує висловлені гіпотези

## Перелік посилань

1. Ткачук А.Я., Довгалюк В.Б. Аеродинаміка вентиляції: Навчальний посібник. – ІВНВП «Укрґеліотех», 2009. – 376 с.
2. Мілейковський В.О. Геометричне моделювання вільних ізотермічних струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 82. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко. – К.:КНУБА, 2009 р.– 400с.
3. Мілейковський В.О. Обґрунтування профілю швидкості плоских напівобмежених струмин // Нова тема. Науково-виробничий журнал №1 2011 р. - С.34-36.
4. Мілейковський В.О. Геометричне обґрунтування профілю швидкості в струминних примезових шарах // Будівництво України. №1 2010 р. - С.17-20.
5. Мілейковський В.О. Геометричне моделювання плоских напівобмежених струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 86. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко.–К.:КНУБА, 2010 р.– 472с. – С.187-191.
6. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй.-М.:Физматгиз,1960.-715с.
7. Теория турбулентных струй / Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю. и др. Изд. 2-е, перераб и доп. / под ред. Г.Н.Абрамовича. – М.: Наука, 1984. – 716 с., ил.

УДК-62-525

**О. В.УЗУНОВ**, канд. техн. наук, **І. В.НОЧНІЧЕНКО**

### **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ У ГІДРАВЛІЧНОМУ АВТОМОБІЛЬНОМУ АМОРТИЗАТОРІ**

*У статті представлена математична модель робочого процесу у гідравлічному амортизаторі, яка враховує особливості роботи в режимах “відбою” та “стиснення”, а також інерційну складову навантаження. Перевірка коректності та адекватності моделі показала можливість її використання для дослідження впливу параметрів та умов на експлуатаційні характеристики амортизатора.*

*В статье представлена математическая модель рабочего процесса в гидравлическом амортизаторе, которая учитывает особенности работы в режимах “сжатия” и “отбоя”, а также инерционную составляющую нагрузки. Проверка корректности и адекватности модели показала возможность ее использования для исследования влияния параметров и условий на эксплуатационные характеристики амортизатора.*

*The paper presents a mathematical model of work processes in hydraulic shock absorber, which takes into account the direction of motion, the inertial component of the load, the difference in throttling under the “compression” and “lights” out. Checking the correctness and adequacy of the model showed the possibility of its use to study the influence of parameters and conditions of the operational characteristics of the shock absorber.*