УДК 656.13

Прокудін Г.С., Цуканов О.І. Прокудін О.Г.

ІМІТАЦІЙНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ РЕСУРСАМИ У ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМАХ

Розроблена імітаційна модель управління ресурсами у логістичних системах типу систем масового обслуговування (СМО). Модель надає можливість визначити оптимальну кількість постійних сервісів у СМО і сервісів, які можуть залучатись додатково За критерій ефективності структури СМО прийнято максимум валового прибутку.

Разработана имитационная модель управления ресурсами в логистических системах типа систем массового обслуживания (СМО). Модель позволяет определить оптимальное количество постоянных сервисов в СМО и сервисов, которые могут привлекаться дополнительно. Критерием эффективности структуры СМО принят максимум валовой прибыли.

Developed a simulation model of resource management in logistics systems such as queuing systems (QS). The model makes it possible to determine an optimal number of regular services in the QS and services that can that may be involved in addition. For the performance criterion of QS structure adopted a maxitum gross profit.

Постановка проблеми. Однією із актуальних задач при дослідження логістичних систем є задача оптимального управління запасами при випадковому попиті. Серед таких задач є задача визначення оптимальної кількості однорідних засобів виробництва у системах масового обслуговування (СМО), наприклад, транспортних засобів, необхідних для перевезення вантажів, запасів продукції у системах управління запасами та інш. Вирішення задачі оптимізації потреби у виробничих засобах у (СМО), закріплених за нею на постійній основі, передбачає необхідність встановлення такого значення $n = n_{opt}$, при якому функція прибутку $P(n)$ приймає максимальне значення.

Викладення основного матеріалу. Математична модель задачі визначення оптимальної кількості однорідних засобів обслуговування у СМО, формулюється наступним чином. СМО потрібна мати у своєму складі n обслуговуючих сервісів, які обслуговують потік вимог (заявок), який надходить з певною інтенсивністю. Кількість вимог у СМО характеризується розподілом імовірностей попиту на обслуговування. У випадку, коли попит перевищує обслуговуючу потужність СМО, вона може залучати деяку додаткову кількість аналогічних обслуговуючих сервісів і таким чином збільшити свою пропускну спроможність. У випадку, якщо попит перевищує наявну і додаткову кількість обслуговуючих сервісів, мають місце втрати необслужених клієнтів і, як наслідок, втрати очікуваного прибутку. Потік заявок на обслуговування є випадковим і може описуватись ординарним або неординарним, випадковим процесом, тобто процесом із груповим (пакетним) надходженням заявок.

Для опису моделі введемо позначення:

X – випадкова величина, яка визначає попит на послуги СМО в періоді часу t;

K – випадкова величина, яка визначає кількість груп заявок, які надходять в періоді часу t;

Z_i – випадкова величина, яка визначає кількість заявок у i-й групі;

Y – випадкова величина, яка визначає кількість додаткових обслуговуючих одиниць, яку може залучати СМО у періоді t;

n – необхідна кількість власних обслуговуючих одиниць, яку повинна мати СМО протягом всього періоду її функціонування.

Сумарна кількість заявок, яка надходить у систему за час t дорівнює:

$$X = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{K} Z_i, & \text{їðè} \quad K > 0; \\ 0, & \text{їðè} \quad K = 0. \end{cases}$$

Величина X називається *процесом накопичення* і являє собою суму випадкового числа випадкових доданків. У нашому випадку величина X виражає попит на обслуговуючи сервіси у СМО, тобто характеризує інтенсивність вхідного потоку.

Припустимо, що величини K, Z_i, Y є випадковими величинами з розподілами ймовірностей відповідно $p_k(t) = P(K = k)$ і $g_i = P(Z_i = i)$, $q_m = P(Y = m)$.

Розподіл величини N_t визначається за розподілами величин K òà Z_j і дорівнює

$$P_k = \sum_{i=1}^{\infty} P(K = i) P(X = k / K = i) = \sum_{i=1}^{k} p_i P(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_i = k) == \sum_{i=1}^{k} p_i g_k^{(i)}$$

де $g_k^{(i)}$ є i-кратна згортка розподілів випадкових величин Z_i $(i = 1, 2, \ldots)$, тобто є розподілом суми і незалежних однаково розподілених випадкових величин Z_i.

Позначимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини K через $m_k = M(K)$ і $D_k = D(K)$, а величин Z_i через $m_z = M(Z_i)$ і $D_z = D(Z_i)$ і знайдемо математичне сподівання і дисперсію величини N_t, які виражаються через відповідні характеристики величин K, Z_i.

За формулою повного математичного сподівання математичне сподівання кількості заявок $X(t)$ у СМО за час t дорівнює:

$$m_X(t) = M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} M(X / K = k)\, p_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k} M(Z_i) \right] p_k(t) =$$

$$= m_z \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k(t) = m_z\, m_k.$$

Дисперсію випадкової величини $X(t)$ визначаємо за формулою:

$$D_X(t) = M(X^2) - M(X)^2 = M(X^2) - [m_X(t)]^2,$$

де $M(X^2)$ дорівнює

$$M(X^2) = m_z^2\ M(K^2) + D_z\, m_k.$$

Підставляючи сюди вирази для $m_X(t)$ і $M(X^2)$, одержуємо

$$D_N(t) = m_z^2 M(K_t^2) + D_z m_k - (m_z m_k)^2 = m_z^2 [M(K^2) - m_k^2] + D_z m_x =$$
$$= m_z^2 D_k + D_z m_k,$$

де $D_k = M(K^2) - m_k^2$.

Ці формули дають можливість визначити середнє значення необхідної кількості обслуговуючих сервісів у СМО і порівняти їх з оптимальним значенням за вартісним критерієм, яке буде визначено далі.

Розгляне тепер модель задачі визначення оптимального значення кількості сервісів у СМО. Для цього спочатку визначимо величини доходу і витрат, пов'язаних з роботою сервісів СМО і сервісів, які можуть бути залучені додатково:

A – дохід від виконання роботи одним сервісом;

B – витрати на утримання одного сервісу, який належить підприємству на постійній основі;

C – витрати, пов'язані з невикористанням сервісу на основній роботі у СМО;

D – витрати на використання одного сервісу, який залучається СМО додатково;

E – можливі втрати доходу, пов'язані з невиконанням замовлення у розрахунку на один обслуговуючий сервіс.

Показники A, B, C, D, E можуть бути розраховані на основі статистичних даних або визначені по аналогії з деякими відомими зразками. Величина E має гіпотетичний характер і може варіювати у заданих межах.

Нехай n є кількість власних обслуговуючих сервісів, яку повинна мати СМО. Тоді в залежності від випадкового попиту на обслуговуючі сервіси, наявності їх у СМО і випадкової кількості одиниць, які СМО може залучати додатково, можуть виникати такі ситуації:

- попит на обслуговуючи сервіси N_t рівний або менше ніж їх кількість у СМО $(X \le n)$ і має місце втрата прибутку від їх невикористання;
- попит на обслуговуючи сервіси N_t перевищує їх наявну кількість у СМО $(X > n)$, але є достатня кількість пропозицій додаткових сервісів Y $(n+1 \le X \le n+Y)$ і СМО має можливість одержати додатковий прибуток за рахунок їх використання;
- кількість обслуговуючих сервісів n і Y недостатня для задоволення попиту $X > n + Y)$ і має місце втрачений прибуток від невиконання замовлень на обслуговування.

Визначимо цільову функцію як середній валовий прибуток СМО, який є різницею між доходом за рахунок виконання послуг та витратами з урахуванням утримання сервісів і втрати доходу від нестачі обслуговуючих сервісів. Він виражається випадковою функцією, аргументами якої є невідома величина n і випадкові величини X і Y.

$$f(n,X,Y)=\begin{cases} AX-Bn-C(n-X), & X\le n;\\ An-Bn-D(X-n), & n+1\le X\le n+Y;\\ An-Bn-DY-E(X-n-Y), & X\ge n+Y+1.\end{cases}$$

Усереднюючи цей вираз за розподілами ймовірностей випадкових величин X і Y, одержимо цільову функцію даної задачі як математичне сподівання функції $F(n,X,Y)$ від випадкових величин X і Y:

$$P(n)=A\left(\sum_{i=0}^{n} ip_i+n\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i\right)-B\sum_{i=0}^{n}(n-i)p_i-Cn-D\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=Q+1}^{n+k}(i-n)p_i+k\sum_{i=n+k+1}^{\infty}p_i\right)q_k-$$
$$-E\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=n+k+1}^{\infty}(i-n-k)p_i\right)q_k$$

Алгоритм аналітичного розв’язання даної задачі при ординарному потоці вимог викладений у роботі [1], та у навчальному посібнику [2]

Ефективним методом розв’язання цієї задачі може бути імітаційне моделювання. Імітаційне моделювання дає можливість дослідити особливості функціонування системи у більш складних умовах, зокрема, при наявності деяких обмежень. При цьому параметри системи і обмеження можна варіювати з метою визначення оптимального варіанту структури СМО. Моделювання логістичних процесів здійснюється за середніми значеннями одержуваних випадкових величин.

Сучасні комп’ютерні технології, зокрема система Mathcad, дають зручні засоби для реалізації стохастичних моделей. Для цього є спеціальні ймовірнісно-статистичні функції для створення масивів даних (багатовимірних векторів) із заданими законами розподілу. Застосування ймовірнісно-статистичних функцій значно спрощує алгоритми статистичного моделювання і дає можливість моделювати складні за структурою процеси і системи.

Зокрема, у досліджуваній моделі можуть застосовуватись такі функції генерації випадкових чисел:

- $r\exp(n,\lambda)$ – моделює вибірку об’єму n, розподілену за експоненціальним законом з параметром λ;
- $\mathrm{rnorm}(n,\alpha,\sigma)$ – моделює вибірку об’єму n, розподілену за нормальним законом з параметрами α і σ;
- $\mathrm{rpois}(n,\lambda)$ – моделює вибірку об’єму n, розподілену за законом Пуассона з параметром λ.

Розглянемо метод імітаційного моделювання потреби у виробничих ресурсах СМО. За допомогою функцій генерації випадкових чисел, розподілених за заданим законом, одержуємо масив значень кількості сервісів у

СМО, які вона може мати постійно і визначимо складові цільової функції.

● кількість сервісів у випадку, коли попит не перевищує їх наявну кількість:

$$U_1(n) = \begin{cases} X, & \text{ÿêùî} \quad n - X \geq 0, \\ 0 & \text{ó ³íøèõ} \quad \text{âèïàäêàõ} \ ; \end{cases}$$

● кількість сервісів у видку, коли попит перевищує їх наявну кількість і залучаються додаткові сервіси:

$$U_2(n) = \begin{cases} n + Y, & \text{ÿêùî} \quad X \geq n + Y, \\ 0 & \text{ó ³íøèõ} \quad \text{âèïàäêàõ} \ ; \end{cases}$$

● кількість сервісів, що простоюють у наслідок недостатності попиту:

$$V(n) = \begin{cases} n - X, & \text{ÿêùî} \quad n - X \geq 0, \\ 0 & \text{ó ³íøèõ} \quad \text{âèïàäêàõ} \ ; \end{cases}$$

● кількість сервісів, які залучаються додатково:

$$Q(n) = \begin{cases} n + Y, & \text{ÿêùî} \quad n + 1 \leq X \leq n + Y, \\ 0 & \text{ó ³íøèõ} \quad \text{âèïàäêàõ} \ ; \end{cases}$$

● кількість сервісів, яких недостатньо для задоволення попиту (дефіцит сервісів):

$$R(n) = \begin{cases} X - n - Y, & \text{ÿêùî} \quad X > n + Y; \\ 0 & \text{ó ³íøèõ} \quad \text{âèïàäêàõ} \ . \end{cases}$$

Величина валового прибутку має вигляд:

$$P(n) = \begin{cases} A\,U_1(n) - B\,n - C\,V(n), & X \leq n; \\ A\,U_2(n) - B\,n - D\,Q(n), & n + 1 \leq X \leq n + Y; \\ A\,U_2(n) - B\,n - D\,Q(n) - E\,R(n), & X \geq n + Y + 1. \end{cases}$$

Задача оптимізації потребі у засобах обслуговування СМО, закріплених за нею, полягає у визначенні такого значення $n = n_{opt}$, при якому функція прибутку $P(n)$ буде мати максимальне значення. При фіксованих значеннях n функція $P(n)$ є опуклою вверх по n і має єдиний максимум. Отже, існує єдине значення n_{opt}, яке дає максимум цільової функції $P_{max} = P(n_{opt})$:

Алгоритм реалізації моделі у Mathcad

1. Задаємо вартісні показники доходу і витрат СМО:

$$A := 1200 \quad B := 250 \quad C := 300 \quad D := 500 \quad E := 400$$

2. Задаємо кількість прогонів моделі N і номер кроку прогону

$$N := 1000 \qquad r := 0..N$$

3. Задаємо діапазон значень кількості постійних сервісів у СМО n_1, n_2 і індекс циклу визначення параметрів моделі

$$n_1 := 5 \quad n_2 := 15 \quad n := n_1 .. n_2$$

4. Задаємо параметри розподілів ймовірностей попиту і пропозиції додаткових сервісів λ і μ і визначаємо числові характеристики цих розподілів.

$$\lambda := 10 \; X := rpois(N,\lambda) \; min(X) = 1 \quad max(X) = 25 \quad M_x := mean(X) \quad M_x = 10.03$$

$$\mu := 2.5 \quad Y := rpois(N,\mu) \quad min(Y) = 0 \quad max(Y) = 10 \quad M_y := mean(Y) \quad M_y = 2.5$$

5. Визначаємо кількість сервісів у СМО

$$U1_{n,r} := if(n - M_x \geq 0, M_x, 0)$$

$$U2_{n,r} := if(M_x > n + M_y, n + M_y, 0)$$

$$U_{n,r} =: U1_{n,r} + U2_{n,r}$$

6. Визначаємо кількість сервісів, що простоюють

$$V_{n,r} := if(n - M_x \geq 0, n - M_x, 0)$$

7. Визначаємо кількість сервісів, які залучаються додатково:

$$Q_{n,r} := if(n + 1 \leq M_x, M_y, 0)$$

8. Дефіцит сервісів

$$R_{n,r} := if(M_x > n + M_y, M_x - n - M_y, 0)$$

9. Витрати на обслуговування постійних сервісів СМО $B_n := Bn$.

10. Записуємо вираз для цільової функції

$$P_{n,r} := A \cdot U_{n,r} - B_n - C \cdot V_{n,r} - D \cdot Q_{n,r} - E \cdot R_{n,r}$$

11. Визначаємо середнє значення цільової функції по всіх кроках прогону моделі

$$F_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=0}^{N} P_{n,r} \quad P_{mean} := mean(F) \quad P_{mean} = 4832.1$$

$$F := F \cdot 1000^{-1} \qquad F^T =$$

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	5.5	6.9	8.2	9.4	10.3	9.8	9	8.4	7.9	7.3	6.8

12. Визначаємо максимальне значення цільової функції і оптимальне значення кількості сервісів у СМО

$$P_{max} := max(F) \quad P_{max} = 10.3$$

$$n_{opt} := \sum_{n=n_1}^{n_2} if(F_n = P_{max}, n, 0) \qquad n_{opt} = 9$$

За одержаними результатами реалізації моделі оптимальна стратегія управління ресурсами у логістичній системі характеризується такими параметрами:

● максимальне значення цільової функції $P_{max} = 10{,}3$ грош. од.;

● середній попит на ресурси (сервіси) $M_x = 10$;

● оптимальна кількість постійних сервісів у СМО $n_{opt} = 9$;

● середня кількість сервісів, що залучаються додатково $R_y = 1{,}5$.

● оптимальна загальна кількість сервісів для даної СМО дорівнює 10,5 (9+1,5) одиниць.

Відмітимо, що ці результати співпадають з аналогічними результатами, одержаними за аналітичною моделлю, яка досліджена у [1, 2].

Висновок. Розроблена імітаційна модель управління ресурсами у логістичній системі і приклад її застосування для оптимального планування кількості сервісів у СМО показує можливість її широкого застосування для розв'язання різноманітних практичних задач. Крім того комп'ютерна реалізація моделі у математичному пакеті Mathcad показує високу обчислювальну ефективність сучасних комп'ютерних технологій для розв'язання оптимізаційних задач і може бути використана у системній моделі оптимального функціонування автотранспортних підприємств.

Література

1. Воркут А.І., Цуканов О.І. Алгоритм оптимізації кількості транспортних засобів при випадковому попиті / Вісник НТУ та ТАУ. – К., 2002. – Випуск 7, С. 170–174.

2. Гавриленко В.В., Цуканов І.М., Цуканов О.І. Комп'ютерні технології в аналізі систем управління запасами. – К.: НТУ, 2009. – 228 с.