УДК 517.4

Крюкова Г.В.

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В МОДЕЛЮВАННІ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

В роботі розглядається математична модель транспортної системи (узагальнена модель Курамото), наводяться умови синхронізації системи. Вивчаються стійкі та нестійкі системи.
В работе рассматривается математическая модель транспортной системы (обобщенная модель Курамото), исследуются условия синхронизации системы. Изучаются устойчивые и неустойчивые системы.
In the paper we consider the mathematical model of material flow system (generalized Kuramoto model), we study conditions for system synchronization. We study stable and unstable systems.

В стрімкому розвитку нашого глобалізованого світу надзвичайне значення має товароматеріальний потік та його проблеми. Для координації та кращого функціонування транспортних систем стає необхідною координація дій в один і той самий момент часу. Прикладами можуть бути координація перехресть в дорожньому русі [1], ланцюги постачання у виробничих процесах [2] і т.ін. Сучасні дослідження логістичних систем показали, що їх можна розглядати як транспортні задачі з балансовим рівнянням та рівняннями швидкості адаптації виробництва [3]. Нелінійна поведінка таких систем відрізняється, проте математична складова моделі однакова – система диференціальних рівнянь, що описує систему взаємодіючих осциляторів [4]. Хоча традиційні системи оптимального керування дають методи управління окремими частинами загальної транспортної системи, неоднорідність та складність системи робить задачу координації практично нереалізовною цими методами. Більше того, ефективна координація має бути стабільною та гнучкою до постійних змін у системі. В роботі [5] запропонована модель децентралізованого керування транспортною системою, що базується на фазовій синхронізації циклічних обслуговуючих процесів в складових частинах мережі. В даній роботі ми продовжуємо дослідження в даній тематиці: вивчаємо умови стійкості та синхронізації системи в запропонованій математичній моделі.

Розглянемо математичну модель транспортної мережі: зважений та орієнтований граф, в якому рух через ребра обмежений максимальним можливим значенням. Підмножини зв‘язків активні в різні часи, тобто робота кожної вершини є періодичною, стан якої будемо описувати фазою $\theta(t)$. Фаза θ осцилятора змінюється від 0 до 2π з частотою ω. Зміна фази в системі N взаємодіючих осциляторів описується узагальненим рівнянням Курамото [6]:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\sin(\theta_j - \theta_i) \qquad (1)$$

Тут ω_i, $i \in 1,...,N$ – власні частоти осциляторів – випадкові числа з густиною ймовірності $g(\omega)$ (без втрати загальності вважатимемо, що $g(\omega)$ – парна та фінітна функція), $a_{ij}(t) \ge 0$ – коефіцієнт зв‘язку між осциляторами i та j (пропускна здатність).

Нашою задачею є вивчення умов фазової та частотної синхронізації такої системи. Чисельні підрахунки показують, що динаміка подібної системи така: деякий час після початку система адаптується, а з деякого моменту відбувається частотна синхронізація та стає незмінною різниця фаз взаємодіючих осциляторів, проте бувають і такі випадки, коли адаптація відбувається дуже довго, а синхронізації так і не виникає. Справді, така динаміка є типовою для класичної моделі Курамото, тобто моделі взаємодіючих осциляторів, що описуються рівнянням (1) з незмінними у часі коефіцієнтами $a_{ij}(t) = a_{ij} = {}^{1}\!/_{N}$ (див. [6]). Для класичної моделі Курамото відомо, що коли $K > K_0 = \dfrac{2}{\pi g(0)}$, то після деякого періоду адаптації відбувається частотна синхронізація та фіксується різниця частот, в той час, коли для інших значень коефіцієнту K таке явище не відбувається. Виникає питання: які ж умови для виникнення синхронізації в узагальненій моделі Курамото?

В роботі [7] ми проаналізували аналогічну математичну модель та прийшли до висновку, що умовою виникнення синхронізації в системі з випадковими зв‘язками є $K > K_c$, де

$$K_c = \frac{K_0\langle d\rangle}{\langle d^2\rangle} = \frac{K_0\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}}{\sum_{i,j,k=1}^{N} a_{ij}a_{jk}} \approx \frac{K_0}{\lambda},$$

тут λ - найбільше власне число матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$.

Отже, система є стійкою при достатньо великому $K > K_c$. Маємо деякі очевидні висновки: по-перше, K_c тим менше, чим більші коефіцієнти a_{ij}. Цей висновок очевидний і з практики, адже чим більша пропускна здатність, тим більш стабільною стає система. По-друге, K_c найбільше, коли λ - найменше. Використовуючи результати, одержані нами в роботі [8], можна прийти до висновку, що для зв’язних графів найменше значення λ досягається для графів, що є ізоморфними діаграмам Динкіна (див. рис. 1).

Справді, цей висновок теж легко усвідомити, адже при блокуванні будь-якого ребра-зв’язка в такому графі система перестає бути зв‘язною, тобто функціонування обмежене, а відповідно ні про яку стійкість не йде мова. Отже, елементарні висновки з нашої моделі узгоджуються з практичним досвідом.

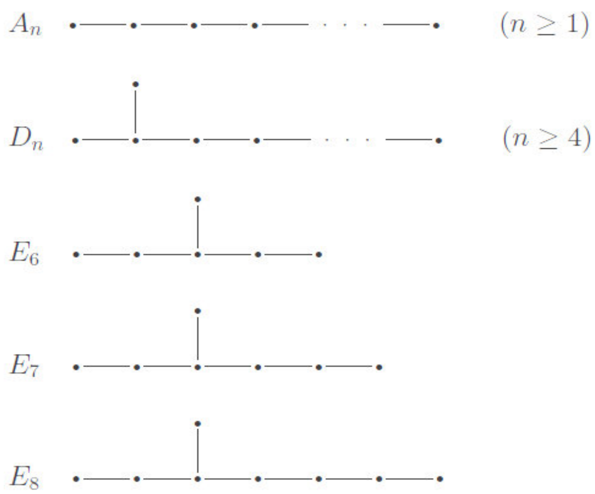

Рис. 1. Діаграми Динкіна

Отже, з самої структури зв'язків в системі можна робити висновок про стійкість, і навпаки – структуру зв'язків можна оптимізувати для забезпечення найбільшої стійкості логістичної системи. Очевидно, що в роботі підхід до вивчення проблеми стійкості логістичних систем не є повними та вимагає подальшого вивчення як теоретичного, так і практичного.

Література

1. T. Nagatani, "The physics of traffic jams". Reports on Progress in Physics. – 2002. – 65, P. 1331–1386.
2. D. Helbing, "Modelling supply networks and business cycles as unstable transport phenomena". New Journal of Physics. – 2003. – 5. – P. 90.1-90.28.
3. A. Arenas, A. Diaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou, "Synchronization in Complex Networks", Physics Reports, – 2008. – Vol. 469, – P. 93-153.
4. D. Helbing, S. Lammer, T. Seidel, P. Seba, T. Platkowski "Physics, stability, and dynamics of supply networks". Physical Review E, - 2004. – Vol. 70.
5. S. Lammer, H. Kori, K. Peters, D. Helbing, "Decentralised control of material or traffic flows in networks using phase-synchronisation", Physica A. – 2006. – Vol. 363(1). – P. 39-47
6. Y. Kuramoto, "Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence", Springer, Berlin, 1984.
7. G. Kriukova, M. Hasler "Frequency synchronization in a random oscillator network". Proceedings of 17-th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES 2009), Rapperswil, Switzerland, – 2009, – P. 196-198.
8. N.S. Golovaschuk, G.V. Kriukova, "On non-negative integer quadratic forms", Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2009. – Vol. 3. – P. 14-21.