УДК 681.51

Сільвестров А. М., Самсонов В. В.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНОЇ СКЛАДОВОЇ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ

Для моделі, що складається з лінійної динамічної та гладкої нелінійної статичної складових, на основі критерія гладкості Пухова-Хатіашвілі запропоновано алгоритм ідентифікації нелінійної складової за умов невідомої динамічної складової за даними довільного динамічного режиму.

Для модели состоящей из линейной динамической и гладкой нелинейной статичной составляющей на основе критерия Пухова-Хатиашвили предложен алгоритм идентификации нелинейной составляющей при условии неизвестной динамической составляющей по данным произвольного динамического режима.

For a model consisting of linear dynamic and smooth nonlinear static components, based on smoothness criteria by Puhov-Khatiashvili, an algorithm of identification of on linear component provided unknown dynamic component according to data from arbitrary dynamic mode has been suggested.

Вступ. Сучасним інструментом вирішення будь-яких складних задач є системний підхід. В основу його покладено математичну модель, отримати яку в більшості випадків можливо на основі теоретико-експериментальних робіт на досліджуєму об’єкті (ДО). Незалежно від природи, реальним об’єктам притаманні такі властивості, як гладка нелінійність, не стаціонарність, невизначеність їх достовірної математичної моделі в наслідок неавтономності ДО. Принцип множинності моделей [1] вказує на нескінченну множину моделей, які з бажаною помилкою задовольняли б вимогам до конкретної задачі. Але, як правило, користуючись принципом мінімальної складності [2], вибирають найпростішу модель. Тим більше, що в багатьох випадках вона ще й відповідає фізиці процесів в ДО. Модель представлено у часі t відображенням причина “$x(t)$ (вхід) – наслідок (вихід) $y(t)$“.

Ціль і задача полягає в розробці такого методу ідентифікації статичної нелінійної складової $f(x)$ Гамерштейна [3], який би задовольняв вимогам за точністю оцінювання $f(x)$ в умовах обмеженості спостерігаємих з випадковою завадою змінних $x(t)$ і $y(t)$ з довільного динамічного режиму. Єдиною необхідною умовою є достатній динамічний діапазон цих змінних та гладкість залежності $f(x)$. Остання вимога, як правило, відповідає природним властивостям ДО (в природі кінцевих за потужністю функцій $x(t)$, $y(t)$ і $f(x)$ не існує ідеальних розривів ні першого, ні другого роду). Задача визначення з динаміки статики ДО виникає в багатьох випадках, наприклад в елементах та системах слабо - та сильнострумної електроніки (електронні підсилювачі, автоматизований електропривод та ін.); визначення балансировочних залежностей (залежностей в статиці) між керуючим впливом x і реакцією y на нього (літаки та інші ДО, що рухаються); визначення фундаментальних (стабільних) співвідношень „причина-наслідок” в економіці по даним перехідного періоду, як динамічного процесу та багато інших.

Сутність методу визначення гладкої статичної нелінійності з довільної динаміки ДО. Нехай динамічна складова моделі об’єкту описується лінійним диференціальним рівнянням, якому відповідає модель Гамерштейна:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = f[x(t)], \tag{1}$$

де $f[x(t)]$ – статична нелінійність, на вхід якої поступає сигнал $x(t)$, а вихід цієї нелінійності впливає на динамічну складову ДО (ліва частина рівняння (1)).

Задача полягає у тому, щоб за вимірюваними зашумленими значеннями виходу $\hat{y}(t_k)$ оцінити невідому статичну нелінійність $f(x)$.

Класичні способи вирішення задач такого типу полягають у наступному:
– невідома нелінійність $f[x(t)]$, як функція вхідного впливу $x(t)$ апроксимується поліномом

$$f\left[\left(x\right)\right] = b_0 + b_1 x(t) + b_2 x^2(t) + \cdots + b_{r-1} x^{r-1}(t); \tag{2}$$

– формується нев’язка

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - f[x(t)], \tag{3}$$

де $f[x(t)]$ є поліномом (2),

– закладається функціонал, наприклад

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)dt\,. \tag{4}$$

Параметри b_k, $k = \overline{1, r-1}$, $a_k, k = \overline{1, n}$ оцінюються за умови мінімуму функціоналу (4), тобто за методом найменших квадратів (МНК). МНК – оцінка $m + n$ невідомих коефіцієнтів b_k, a_k має ряд суттєвих недоліків: за малих m модель $\hat{f}(x)$ не буде адекватною $f(x)$, за великих – система рівнянь МНК буде виродженою, а наявність випадкових збурень у вимірах $\hat{y}(t)$ робить задачу оцінювання $f(x)$ ще більш некоректною, тим більше, що похідні від $y(t)$, як правило, не вимірюються, а розраховуються по забуреним завадою вимірам $\hat{y}(t)$. Використання більш оптимальних, ніж МНК, методів в умовах обмеженості виборок даних і відсутності достовірної інормації про завади суттєво не полегшує ситуацію.

З метою визначення непараметричної моделі $\hat{f}[x(t)]$ статичної нелінійності $f[x(t)]$ визначимо скомпенсований вихід об’єкту $y_{\text{ск}}$, наприклад, для $n = 2$, у вигляді

$$y_{ck}(t) = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2} \tag{5}$$

де параметри β_1, β_2 визначаються за умови мінімуму критерія гладкості Пухова [4], тобто середнього квадрату r-ї похідної від $\hat{y}(t)$ по x, яка апріорі вважається (внаслідок гладкості залежності $f\left(x\right)$) нульовою:

$$(\beta_1, \beta_2) = \underset{\beta_1, \beta_2}{\arg\min} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d^r y_{\tilde{n}\hat{e}}(t_k)}{dx^r} \right)^2 . \tag{6}$$

Приймаючи до уваги дискретність вимірювань вихідної величини y замість r-ї похідної можна використовувати відповідну різницю дискретної послідовності $x(t_k)$, яка вимірюється із сталим кроком у часі Δt, перетворивши її у послідовність із сталим приростом Δx, але вже із змінним кроком у часі. Для цього перш за все треба виконати згладжування зашумлених вхідної та вихідної послідовностей вимірювань за допомогою сплайнів, що згладжують. Тоді можна впорядковувати значення вхідної змінної $x(t_k)$ за зростанням. Далі, для визначення значень t_j, які відповідають значенням вхідної змінної, що змінюються зі сталим кроком, виконаємо інтерполювання одержаної послідовності за допомогою інтерполяційних сплайнів:

$$S_2(t) = x_k + m_k(t - t_k) + c_k(t - t_k)^2, \quad t \in \left[t_k, t_{k+1}\right] . \tag{7 }$$

Значення t_j, які відповідають $j\Delta x$, знаходимо шляхом розв'язання рівняння сплайну (7):

$$t_{jk} = t_k + \frac{1}{2c_k}\left(-m_k + \sqrt{m_k^2 + 4jc_k\Delta x}\right), \tag{8}$$

де $j = \overline{1, l_k}$, $l_k = \left[x(t_{k+1}) - x(t_k)\right] / \Delta x$.

Після визначення усіх t_{jk} обчислюються значення $\hat{y}(t_{jk})$, $d\hat{y}(t_{jk})/dt$, тощо.

Оскільки замість похідних використовуються скінчені різниці, маємо:

$$\Delta^r y_{c\kappa} = \Delta^r \left[\hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2} \right]. \tag{9}$$

Зокрема, для $r = 2$ маємо:

$$\Delta^2 y_{c\kappa} = \left[y_{c\kappa}(t_{k+2}) - 2y_{c\kappa}(t_{k+1}) + y_{c\kappa}(t_k)\right] / (\Delta x)^2; \tag{10}$$

для $r = 3$:

$$\Delta^3 y_{c\kappa} = \left[y_{c\kappa}(t_{k+3}) - 3y_{c\kappa}(t_{k+2}) + 3y_{c\kappa}(t_{k+1}) - y_{c\kappa}(t_k)\right] / (\Delta x)^3 . \tag{11}$$

Мінімізація функціоналу, таким чином, полягає у розв'язанні відносно β_1, β_2 системи нормальних рівнянь МНК:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1}^{N}\left[\Delta^r\hat{y}(t_k)-\Delta^r\dfrac{d\hat{y}(t_k)}{dt}\beta_1-\Delta^r\dfrac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2}\beta_2\right]\Delta^r\dfrac{d\hat{y}(t_k)}{dt}=0\\ \sum\limits_{k=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{N}\left[\Delta^r\hat{y}(t_k)-\Delta^r\dfrac{d\hat{y}(t_k)}{dt}\beta_1-\Delta^r\dfrac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2}\beta_2\right]\Delta^r\dfrac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2}=0\right]\end{array}\right\}. \qquad (12)$$

Після визначення параметрів β_1, β_2 непараметрична модель гладкої статичної нелінійності визначається за формулою

$$f[x(t)]=\hat{y}(t)-\beta_1\frac{d\hat{y}(t)}{dt}-\beta_2\frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}, \qquad (13)$$

де права частина рівняння (13) – це $y_{ск}(t)$ (5).

Приклад визначення статичної нелінійності автоматизованого електроприводу. З метою контролю стійкості та якості системи автоматизованого електроприводу необхідно визначити величину та асиметрію зони нечутливості, крутизну та рівні насиченості нелінійної залежності швидкості Ω обертання вихідного валу системи від напруги $U_Я$ на валу якоря двигуна постійного струму в діапазоні від $-\Omega_{\max}$ до $+\Omega_{\max}$. Динаміці цього процесу відповідає диференціальне рівняння

$$a_2\frac{d^2\Omega(t)}{dt^2}+a_1\frac{d\Omega(t)}{dt}+\Omega(t)=f[U_я(t)], \qquad (14)$$

де $U_Я$ будемо змінювати ступінчато в межах від $-U_{Я\max}$ до $+U_{Я\max}$:

$$U_Я(t)=U_{\max}\left[-1+\frac{1}{q/2}\sum_{k=1}^{q}1(-k\Delta t)\right],\quad q=16;\ 1(t)=\begin{cases}1, & t>k\Delta t,\\ 0, & t<k\Delta t.\end{cases} \qquad (15)$$

Числові значення динамічних параметрів a_1, a_2 невідомі. Параметри тестуючого впливу дорівнюють $U_{\max}=120$ В, $\Delta t=1$ с. Початкові умови: $\Omega(0)=-\Omega_{\max}=-300$ рад/с, $d\Omega(0)/dt=0$. З метою числового моделювання процесу ідентифікації нелінійну залежність $f[U_Я(t)]$ задамо у такому вигляді $\Omega[U_Я(t)]=3[U_Я(t)]-60\sin(0.065[U_Я(t)])$. Це відповідає умові гладкості залежності із зонами нечутливості та насичення. Вимірювання вихідного сигналу приводу здійснюються з кроком $\Delta t=0.1$ с для $N=200$, $q=16$, з 10%-ою похибкою вимірювань у вигляді “білого шуму”.

Процес моделювання та ідентифікації $f[U_Я(t)]$ складався з наступних кроків:

1. Згладжування вхідних $U_Я(t_k)$ та вихідних $\hat{y}_k$ значень $k=\overline{1,N}$.
2. Упорядкування значень $U_Я(t_k)$ у порядку їхнього зростання.
3. Інтерполяція цих значень за допомогою інтерполяційних сплайнів (7).

4. Визначення значень t_{jk}, що відповідають рівномірному змінюванню $U_Я(t_k)$ зі сталим кроком ΔU.
5. Обчислення значень $\hat{y}(t_{jk})$, а також похідних першого та другого порядку від цих значень (кінцевих різниць).
6. Мінімізація по β_1, β_2 функціоналу (6) у такому вигляді $\min\limits_{\beta} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial^r \hat{y}_{ck}(t_k)}{\partial U^r(t)} \right)^2$ дало оцінки $\hat{\beta}_1 = 0{,}0196,\ \hat{\beta}_2 = 0{,}000134.$ Шукана нелінійність $f[U_Я]$ визначається за формулою (13): $f[U_Я(t)] = y(t) - 0.0196\frac{dy(t)}{dt} - 0.000134\frac{d^2y(t)}{dt^2}$. Результати моделювання для $r = 1{,}2{,}3$ наведено на рис. 1. Остаточна похибка виявилась найменшою для $r = 2$ й дорівнює $\varepsilon_2 = 3.067$, що менше 0,5%.

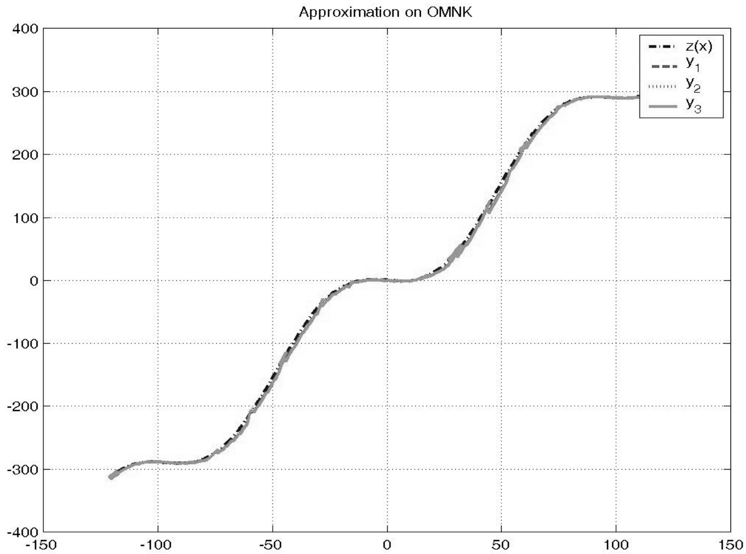

Рис. 1. Оцінка статичної нелінійності за методом компенсації динаміки для $r = 1{,}2$ та $r = 3$.

Цю ж задачу розв’яжемо за допомогою методу найменших квадратів.

Перший та п’ятий кроки ті ж самі. Далі слідує мінімізація функціоналу (3) шляхом складання та розв’язання системи рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} b_i x_k^i - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y_k}{dt^i}\right] x_k^l\right\} = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k^l, \quad l = \overline{0,m};$$
$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} b_i x_k^i - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y_k}{dt^i}\right] \frac{d^l y_k}{dt^l}\right\} = \sum_{k=1}^{N} y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}, \quad l = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Моделювання нелінійності $\Omega(U_Я)$ виконувалось для $n = 2$ і декількох значень m з метою визначення оптимального степеню поліноміальної залежності (2). З рис. 2 бачимо, що оптимальне значення відповідає $m = 5$. Подальше збільшення m приводить до виродженості системи (16) і, як наслідок, до зростання похибки. Середньоквадратична похибка $\varepsilon_5 = 26,72$, що набагато більше, ніж в методі, що використовує критерій Пухова.

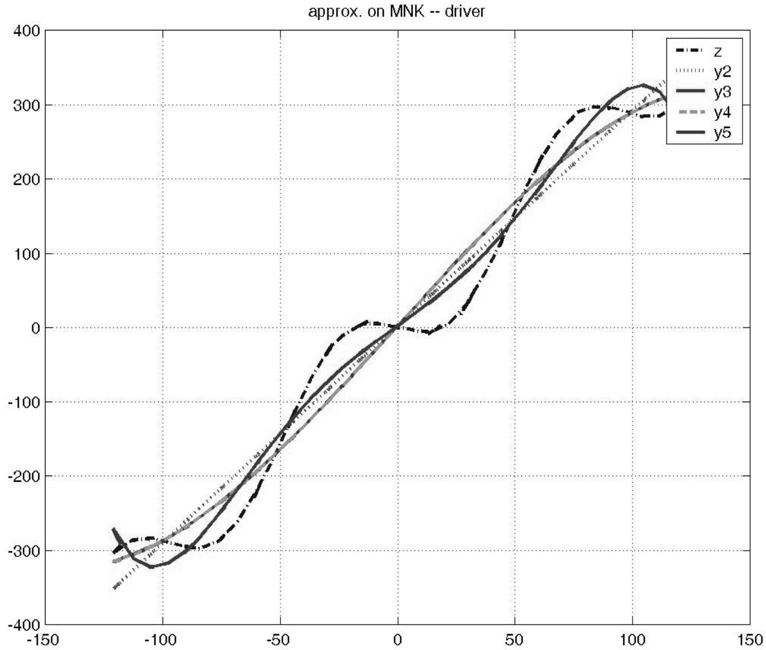

Рис. 2. Оцінка нелінійності для m=2,3,4,5 за МНК.

Далі в пропонованому методі, якщо це необхідно, непараметрична оцінка (13) (рис.1) також може бути апроксимована поліномом (2). Але в цьому випадку попередньо визначена динаміка (12) вже не впливає на процес апроксимації. Тому зі зростанням степені полінома (2) точність апроксимації оцінки (12) поліномом (2) буде тільки зростати.

Висновки. Таким чином, на основі критерію гладкості [4] запропоновано незалежне від невідомої динаміки ДО, представленого нелінійним динамічним оператором Гамерштейна, непараметричне оцінювання фундаментальної (статичної) нелінійної залежності „вхід-вихід" в умовах довільного динамічного режиму на ДО.

Література

1. Wiener N. Nonlinear problems in random theory. MIT Press Research Monographs. Cambridge, 1958, 140 p.
2. Техническая кибернетика. Книга 2. Под. ред. В.В. Солодовникова.М., «Машиностроение», 1967, 682 с.
3. Льюнг Л. Идентификация систем: Пер. с англ./ Под ред. Я.З.Цыпкина. - М.: Наука, 1991. -432 с.
4. Пухов Г.Е., Хатиашвили Ц.С. Модели технологических процессов. Киев: Техника, 1974.- 200 с.