УДК 629.7.015

Харитонова Л.В., Харитонов О.М., Топольсков Є.О.

ПРО ФОРМУ УМОВ СТРИБКА В ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ МАЙЄРА З РОЗРИВАМИ

Розглянуто задачу Майєра оптимального керування рухом динамічної системи з розривами, рух якої відбувається у кількох фазових просторах. Необхідні умови оптимальності проаналізовано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Отримано умови стрибка, як наслідок умов трансверсальності модифікованої задачі оптимального керування.

Рассмотрена задача Майера оптимального управления движением динамической системы с разрывами, движение которой происходит в нескольких фазовых пространствах. Условия скачка получены как следствие условий трансверсальности модифицированной задачи оптимального управления.

The Mayer's type variational problem for the discontinuous dynamical system is considered. It is supposed that the motion of the system takes place in different phase spaces. The necessary optimality conditions are analysed using Pontryagin's maximum principle. The jump conditions are obtained from the transversality conditions for the modified optimal control problem.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Задачі оптимального керування є традійно актуальними для транспортної сфери, оскільки обумовлені необхідністю раціонального виконання тих або інших транспортних операцій. Більше того, сучасна теорія оптимального керування виникла саме у зв'язку з задачами оптимізації руху транспортних систем, насампред – космічних апаратів [1]. Одними з найбільш складних в цій теорії є задачі оптимального керування рухом динамічних систем з розривами. В найбільш загальному випадку це можуть бути розриви правих частин рівнянь руху та фазових координат (сюди ж відносяться задачі руху зі зміною фазового простору), що мають місце на певних поверхнях, через які проходить фазова траєкторія системи. Як приклади можна навести відомі задачі руху корабля в розривному полі течії [2], розрахунок міжпланетних траєкторій шляхом спряження їх ділянок, що належать сферам впливу різних небесних тіл [3] та інші. Необхідні умови оптимальності в задачах з розривами вивчені достатньо повно. У випадку варіаційної задачі Больця загальний вигляд необхідних умов оптимальності та умов стрибка наведений в роботі [2], де, втім, розгляд обмежено випадком відкритої множини допустимих керувань. Для замкненої множини допустимих керувань, для випадку задачі Лагранжа, необхідні умови оптимальності та умови стрибка наведено, наприклад, у роботі [4]. Дослідженню умов стрибка при різних формах проходження оптимальної траєкторії скрізь поверхню розриву присвячені більш пізні роботи А.А. Асланяна [5], М.О. Перестюка [6] та інших. Умови стрибка, отримані на основі принципу максимуму Понтрягіна для задач із замкненою множиною допустимих керувань, мають ту ж форму, що і класичні умови, наведені у роботі [2] для відкритої області. Отже, для кожного розриву ці умови містять додаткові невідомі константи в кількості, рівній порядку системи. Ці константи не мають явного фізичного змісту, а отже визначення їх при чисельному розв'язанні відповідних крайових задач приводить до відомих складнощів, пов'язаних із пошуком початкових наближень. Більш зручною для чисельної реалізації є форма умов стрибка, в якій додаткові константи виключені, а отже, залишаються тільки зв'язки між значеннями спряжених функцій зліва і справа від поверхонь розриву. Зазначена форма запису умов стрибка може бути отримана для випадку запису граничних умов та представлення поверхонь розриву у параметричній формі. В даній роботі умови стрибка у зазначеній вище формі отримані для найбільш загальної постановки задачі оптимального керування – варіаційної задачі Майєра. Вказані спеціальні випадки запису граничних умов є типовими для задач мореплавання та космонавтики, що обумовлює практичну цікавість отриманих результатів.

Постановка задачі оптимального керування динамічною системою з розривами. Задачу оптимального керування сформулюємо, дотримуючись роботи [4]. Проте навідміну від [4], де проаналізовано задачу Лагранжа, ми розглянемо випадок більш загальної постановки - варіаційну задачу Майєра. Необмежуючи загальності, проаналізуємо випадок розриву тільки в один момент часу.

Отже, розглянемо рух динамічної системи, який відбувається у двох фазових просторах і описується системою рівнянь

$$\dot{x}_i^\alpha = f_i^\alpha(x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_{n_\alpha}^\alpha, u_1^\alpha, ..., u_{r_\alpha}^\alpha),\ i = 1, ..., n_\alpha, \alpha = 1, 2 \tag{1}$$

де $x_i^\alpha,\ i = 1, ..., n_\alpha$ - фазові координати, що належать двом фазовим просторам ($\vec{x}^\alpha = (x_1^\alpha, ..., x_{n_\alpha}^\alpha) \in X^\alpha, \alpha = 1, 2$), а $u_j^\alpha,\ j = 1, ..., r_\alpha, \alpha = 1, 2$ - функції керування, що можуть приймати значення з замкнених областей допустимих керувань U^α, $\alpha = 1, 2$.

$$\vec{u}^\alpha = (u_1^\alpha, ..., u_{r_\alpha}^\alpha) \in U^\alpha, \alpha = 1, 2 \tag{2}$$

Нехай t_0 - момент початку руху системи, t_1 - момент розриву фазових координат і зміни фазового простору (момент, коли при описі руху системи рівняннями (1) переходимо від $\alpha = 1$ до $\alpha = 2$), t_2 - момент завершення руху системи. Момент t_1, за припущенням, визначається виходом на гіперповерхню в фазовому просторі X^1, що задається рівняннями

$$\vec{x}^1(t_1) = \vec{\Phi}^1(\vec{\omega}^1), \tag{3}$$

де $\vec{\omega}^1 = (\omega_1^1, ..., \omega_{p_1}^1)$ - вектор незалежних параметрів, що визначають гіперповерхню, на якій має місце розрив.

Крім того, припустимо, що існують зв'язки між значеннями фазових координат в момент завершення руху в просторі X^1 і початку руху в просторі X^2

$$x_i^2(t_1) = \varphi_i(\vec{x}^1(t_1)),\ i = 1, ..., n_2 \tag{4}$$

В початковий момент фазові координати можуть приймати значення з певного многовиду в фазовому просторі X^1, що у параметричному вигляді задається як:

$$\vec{x}^1(t_0) = \vec{\Phi}^0(\vec{\omega}^0), \tag{5}$$

де $\vec{\omega}^0 = (\omega_1^0, ..., \omega_{p_0}^0)$ - вектор незалежних параметрів, що визначають початковий многовид.

В кінцевий момент фазові координати можуть приймати значення з певного многовиду в просторі X^2:

$$\vec{x}^2(t_2) = \vec{\Phi}^2(\vec{\omega}^2), \tag{6}$$

де $\vec{\omega}^2 = (\omega_1^2, ..., \omega_{p_2}^2)$ - вектор незалежних параметрів, що визначають кінцевий многовид.

Задача полягає у знаходженні таких допустимих керувань, що задовольняють умовам (2), які б переводили систему з многовиду (5) на многовид (6) так, щоб забезпечити мінімальне значення функціоналу типу Майєра

$$J = \Delta G^1 + \Delta G^2, \tag{7}$$

де $\Delta G^1 = G^1(\vec{x}^1(t_1)) - G^1(\vec{x}^1(t_0)),\ \Delta G^2 = G^2(\vec{x}^2(t_2)) - G^2(\vec{x}^2(t_1))$.

Моменти t_1 і t_2 вважаємо не фіксованими.

Додатково будемо вважати, що виконані усі умови, що накладаються в теоремі принципу максимуму [4] на функції з рівнянь руху, граничних умов і умов розриву.

Необхідні умови оптимальності для задачі Майєра оптимального керування динамічною системою з розривами. Виведення необхідних умов оптимальності та умов стрибка проведемо дотримуючись роботи [4]. Спочатку введемо нову незалежну змінну часу

$$\tau = \begin{cases} t, & t_0 \le t \le t_1, \\ bt + h, & t_1 < t \le t_2, \end{cases} \tag{8}$$

де $b = \dfrac{t_1 - t_0}{t_1 - t_2},\ h = \dfrac{(t_0 - t_2)t_1}{t_1 - t_2}$. При цьому $\tau(t_2) = t_0, \tau(t_1) = t_1$.

В новому часі рух в обох фазових просторах відбувається одночасно. Тому виникає можливість перейти від розгляду задачі оптимального керування динамічною системою, що рухається послідовно спочатку у просторі X^1, а потім у просторі X^2, до задачі оптимального керування динамічною системою, що рухається в об'єднаному просторі $X^1 \cup X^2$ - модифікованої задачі оптимального керування. Фазовий вектор динамічної системи у модифікованій задачі має вигляд $\vec{x} = (x_1^1, ..., x_{n_1}^1, x_1^2, ..., x_{n_2}^2)$, в момент початку руху $\tau = t_0$ мають виконуватися умови (5) і (6), а в момент завершення $\tau = t_1$ - (3) і (4). Рівняння руху (1) при перетворенні незалежної змінної змінюються і набувають вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i^1}{d\tau} = f_i^1(x_1^1, x_2^1, ..., x_{n_1}^1, u_1^1, ..., u_{r_1}^1),\ i = 1, ..., n_1, \\ &\frac{dx_i^2}{d\tau} = \frac{1}{b} f_i^2(x_1^2, x_2^2, ..., x_{n_2}^2, u_1^2, ..., u_{r_2}^2),\ i = 1, ..., n_2, \\ &\frac{db}{d\tau} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

Функціонал модифікованої задачі оптимального керування можна записати у вигляді:

$$
\begin{aligned}
J &= G^1(\vec{x}^1(t_1)) - G^1(\vec{x}^1(t_0)) + G^2(\vec{x}^2(t_2)) - G^2(\vec{x}^2(t_1)) = \\
&= G^1(\vec{x}^1(\tau = t_1)) - G^1(\vec{x}^1(\tau = t_0)) + G^2(\vec{x}^2(\tau = t_0)) - G^2(\vec{x}^2(\tau = t_1)) = \\
&= \Delta G^1 - \Delta G^2,
\end{aligned} \qquad (10)
$$

де через "Δ" як і раніше позначено різницю значень функціоналу в кінцевий $\tau = t_1$ та початковий $\tau = t_0$ моменти часу.

Необхідні умови оптимальності для модифікованої задачі оптимального керування (9),(2),(5),(6),(3),(4),(10) випишемо користуючись теоремою принципу максимуму для варіаційної задачі Майєра в формулюванні А.М. Льотова [7]. Складемо гамільтоніан:

$$H = H_1 - \frac{1}{b} H_2 , \qquad (11)$$

де

$$H_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \psi_i^\alpha(\tau) f_i^\alpha(\vec{x}^\alpha, \vec{u}^\alpha) = (\vec{\psi}^\alpha(\tau))^T \vec{f}^\alpha(\vec{x}^\alpha, \vec{u}^\alpha) , \qquad (12)$$

ψ_i^α - спряжені функції, що задовольняють спряженій системі диференціальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
\frac{d\psi_i^1}{d\tau} &= -\frac{\partial H_1}{\partial x_i^1}, \\
\frac{d\psi_i^2}{d\tau} &= -\frac{1}{b}\frac{\partial H_2}{\partial x_i^2}, \\
\frac{d\psi_b}{d\tau} &= -\frac{1}{b^2} H_2,
\end{aligned} \qquad (13)
$$

де ψ_b - спряжена функція, пов'язана з останнім рівнянням в системі рівнянь руху (9) модифікованої задачі оптимального керування. Відзначимо, що введені спряжені функції $\psi_1^2,...,\psi_{n_2}^2$ дорівнюють взятим зі знаком „-” звичайним спряженим функціям, що фігурують у теоремі принципу максимуму [4]. Такий спосіб введення пояснюється тим, що тепер, з огляду на від'ємність константи b, для максимізації гамільтоніана H треба максимізувати його частину H_2.

У відповідності до теореми принципу максимуму [7], в кожен момент часу оптимальне керування $\vec{u} = (u_1^1,...,u_{r_1}^1, u_1^2,...,u_{r_2}^2)$ необхідно повинно забезпечувати максимум гамільтоніана (11). Крім того, необхідно повинні виконуватися умови трансверсальності, пов'язані із оптимальним вибором положень системи на початковому і кінцевому многовидах. Для модифікованої задачі оптимального керування (9),(2),(5),(6),(3),(4),(10) вони запишуться у вигляді

$$\left[\delta G_1 - \delta G_2 - H\delta\tau + \sum_{i=1}^{n_1} \psi_i^1(\tau)\delta x_i^1(\tau) - \sum_{i=1}^{n_2} \psi_i^2(\tau)\delta x_i^2(\tau) + \psi_b(\tau)\delta b(\tau) \right]\Bigg|_{\tau=t_0}^{\tau=t_1} = 0. \qquad (14)$$

Для виписування умов трансверсальності в їх остаточній формі, зручній для програмування в алгоритмах чисельного розв'язання, слід прирівняти до нуля коефіцієнти при незалежних варіаціях в рівнянні (14). Відзначимо, що варіації фазових координат в початковий момент часу $\tau = t_0$ $\delta x_1^1(\tau = t_0),...,\delta x_{n_1}^1(\tau = t_0)$ та $\delta x_1^2(\tau = t_0),...,\delta x_{n_2}^2(\tau = t_0)$ повністю визначаються незалежними варіаціями $\delta\omega_1^0,...,\delta\omega_{p_0}^0$ та $\delta\omega_1^2,...,\delta\omega_{p_2}^2$, відповідно, тоді як варіації фазових координат в кінцевий момент $\tau = t_1$ $\delta x_1^1(\tau = t_1),...,\delta x_{n_1}^1(\tau = t_1)$ та $\delta x_1^2(\tau = t_1),...,\delta x_{n_2}^2(\tau = t_1)$ - незалежними варіаціями $\delta\omega_1^1,...,\delta\omega_{p_1}^1$. Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при зазначених незалежних варіаціях, отримаємо:

$$H = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} -\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\partial G^1}{\partial x_i^1} + \psi_i^1\right)\frac{\partial \Phi_i^0}{\partial \omega_k^0}\right\}\Bigg|_{\tau=t_0} &= 0,\ k = 1,...,p_0, \\ \left\{\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{\partial G^2}{\partial x_i^2} + \psi_i^2\right)\frac{\partial \Phi_i^2}{\partial \omega_k^2}\right\}\Bigg|_{\tau=t_0} &= 0,\ k = 1,...,p_2, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\partial G^1}{\partial x_i^1} + \psi_i^1\right)\frac{\partial \Phi_i^1}{\partial \omega_k^1} - \sum_{i=1}^{n_2}\left(\left[\frac{\partial G^2}{\partial x_i^2} + \psi_i^2\right]\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j^1}\frac{\partial \Phi_j^1}{\partial \omega_k^1}\right)\right)\right\}\Bigg|_{\tau=t_1} = 0,\ k = 1,...,p_1, \tag{17}$$

$$\psi_b(\tau = t_0) = 0,\ \psi_b(\tau = t_1) = 0, \tag{18}$$

Виходячи з умов (15), (18), приймаючи до уваги останнє рівняння спряженої системи (13) і той факт,що для оптимального керування має місце перший інтеграл $H = const$, можна отримати відомий результат [4]: вздовж оптимальних траєкторій мають місце перші інтеграли

$$H_\alpha = 0,\ \alpha = 1,2 \tag{19}$$

Відзначимо, що умови (16) являють собою звичайні умови трансверсальності, тоді як умови (17) – умови стрибка, що мають місце у момент розриву.

Для більш зручного їх написання повернемося знову до вихідної незалежної змінної часу t і остаточно сформулюємо необхідні умови оптимальності для розглянутої задачі Майєра з розривами. Виходячи з проведеного розгляду, доведеною є теорема.

Теорема. Для оптимальності допустимих керувань $\vec{u}^1(t)$ і $\vec{u}^2(t)$ та відповідних їм ділянок траєкторії $\vec{x}^1(t)$ і $\vec{x}^2(t)$ необхідно існування таких ненульових неперервних вектор-функцій $\psi^1(t)$ і $\psi^2(t)$, що задовольняють рівнянням

$$\dot{\psi}_i^1 = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i^1}, \dot{\psi}_i^2 = -\frac{\partial H_2}{\partial x_i^2} \tag{20}$$

де функції Гамільтона H_1 і H_2 визначаються виразами (12), що

1). В кожен момент часу t: $t_0 \le t \le t_1$, в якій керування $\vec{u}^1(t)$ є неперервним, функція Гамільтона H_1, як функція керування $\vec{u}^1(t)$, набуває максимального значення;

2). В кожен момент часу t: $t_1 \le t \le t_2$, в якій керування $\vec{u}^2(t)$ є неперервним, функція Гамільтона H_2, як функція керування $\vec{u}^2(t)$, набуває максимального значення;

3). В початковий та кінцевий моменти часу мають місце умови трансверсальності

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\partial G^1}{\partial x_i^1}+\psi_i^1\right)\frac{\partial \Phi_i^0}{\partial \omega_k^0}\right\}\Bigg|_{t_0}=0,\ k=1,...,p_0,$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{\partial G^2}{\partial x_i^2}+\psi_i^2\right)\frac{\partial \Phi_i^2}{\partial \omega_k^2}\right\}\Bigg|_{t_2}=0,\ k=1,...,p_2, \tag{21}$$

4). В момент розриву t_1 мають місце умови стрибка

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\partial G^1}{\partial x_i^1}+\psi_i^1\right)\frac{\partial \Phi_i^1}{\partial \omega_k^1}-\sum_{i=1}^{n_2}\left(\left[\frac{\partial G^2}{\partial x_i^2}+\psi_i^2\right]\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j^1}\frac{\partial \Phi_j^1}{\partial \omega_k^1}\right)\right)\right\}\Bigg|_{t_1}=0,\ k=1,...,p_1, \tag{22}$$

5). Якщо моменти часу t_1 і t_2 не фіксовані, керування $\vec{u}^1(t)$ і $\vec{u}^2(t)$ та відповідні їм траєкторії $\vec{x}^1(t)$ і $\vec{x}^2(t)$ задовольняють умовам 1)-4) даної теореми, то мають місце перші інтеграли

$$H_1=0;\ H_2=0\,. \tag{23}$$

Висновки. В даній роботі розглянуто найбільш загальну постановку задачі оптимального керування рухом динамічної системи з розривами – задачу Майєра. Для випадку запису граничних умов та визначення поверхні розриву у параметричній формі запропоновано нову форму умов стрибка, яка не містить додаткових констант, що не мають визначеного фізичного змісту і затруднюють чисельне розв'язання задач. Розглянута у роботі параметрична форма запису часто зустрічається в прикладних задачах – наприклад, задачах міжорбітальних перельотів космічних апаратів, або задачах оптимального планування морських переходів, що обумовлює практичну значущисть отриманих результатів.

Література

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1974. – 528 с.
2. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
3. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744с.
4. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. - М.: Наука, 1981.-336с.
5. Асланян А.А. Принцип максимума для разрывных динамических систем // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. междувед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – Вып. 37. – Х. : Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. – С. 132 – 137.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.- К. из-во при Киевском гос. университете.-1980, 80с. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 359 с.