

## ДО ПИТАННЯ ПРО ОПИСАННЯ ВЗАЄМОДІЇ АВТОМОБІЛЬНОЇ ШИНИ ТА ОПОРНОЇ ПОВЕРХНІ

Сахно В.П., доктор технічних наук  
 Костенко А.В., кандидат технічних наук  
 Енглезі О.А., кандидат технічних наук  
 Прогній П.О.

**Вступ**

В умовах зростаючих швидкостей автомобілів та інтенсивності руху збільшується аварійність на дорогах. Дорожньо-транспортна пригода (ДТП) – це подія, що сталася під час руху транспортного засобу, внаслідок якої загинули або поранені люди чи завдані матеріальні збитки. Таким чином, ДТП, безумовно, є небажаною подією. Причини ДТП бувають різні – від технічного стану автомобіля і дороги, стану здоров'я водія до порушень правил дорожнього руху тощо. Дослідження або відтворення ДТП – це шлях виявлення причин ДТП та заходів для зниження аварійності.

Відтворення ДТП передбачає використання певного програмного забезпечення з метою моделювання механізму ДТП. Тому є актуальним питання щодо способів моделювання руху автомобілів. Автомобільні шини є важливими елементами автомобіля, що впливають на безпеку руху, оскільки від шин залежить надійність зв'язку автомобіля із дорогою а, отже, ймовірність реалізації високих зчіпних якостей, що в свою чергу впливають на гальмівні властивості, стійкість та керованість руху.

**Постановка завдання**

Метою даної статті є огляд математичних моделей кочення автомобільних шин, що використовуються в програмах, які застосовується для моделювання руху автомобіля взагалі та відтворення ДТП зокрема.

**Основна частина**

Процес взаємодії колеса з дорогою є складним явищем, яке в різні часи різні дослідники пробували описати математично. Результатом цього є існування доволі великої кількості теорій кочення колеса. З огляду на відтворення ДТП, також існує декілька програм, що доволі успішно застосовуються при моделюванні дорожньо-транспортних пригод. Ті чи інші програми використовують певні моделі взаємодії шини з дорогою. В даній роботі розглянуто моделі шин, що використовуються в програмному забезпеченні «VCRware» та «PC-Crash».

Модель шини, що використовується в програмному забезпеченні «VCRware» [1] являє собою рівняння для поздовжньої та поперечної сил, що є продовженням розвитку «магічної» формули Пацейки [2,3], згідно якої поздовжня сила є функцією від проковзування в плямі контакту шини та дороги (рис. 1):

$$F_x(s) = D \cdot \sin \left\{ C \cdot \tan^{-1} [B(1-E)K \cdot s + E \tan^{-1} (B \cdot K \cdot s)] \right\}, \quad (1)$$

де D, C, B, K – коефіцієнти формули, що визначаються емпірично;  
 s – величина проковзування:

$$s = \frac{v_x - R\omega}{v_x}, \quad (2)$$

де  $v_x$  – швидкість руху автомобіля;  
 R – радіус колеса;  
 $\omega$  – кутова швидкість колеса.

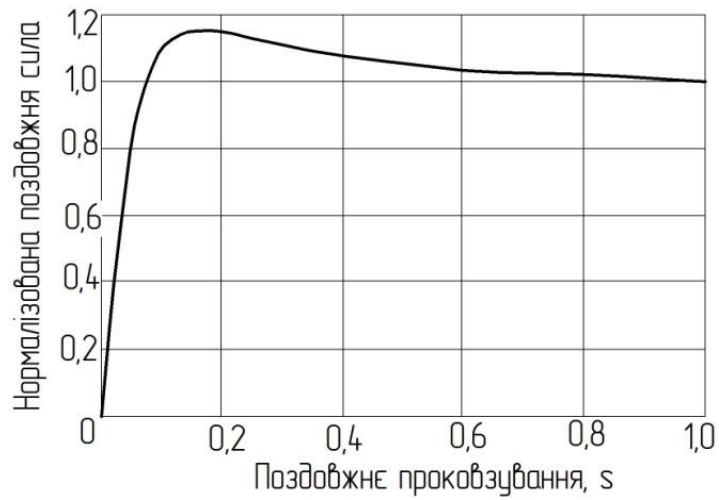


Рисунок 1. – Залежність поздовжньої сили від проковзування

Бічна сила в контактї колеса із опорною поверхнею без наявності поздовжніх сил описується наступним рівнянням (рис. 2):

$$F_y(\alpha) = D \cdot \sin \left\{ C \cdot \tan^{-1} \left[ B(1-E) \cdot K \frac{2\alpha}{\pi} + E \cdot \tan^{-1} \left( B \cdot K \frac{2\alpha}{\pi} \right) \right] \right\}, \quad (3)$$

де  $\alpha$  – кут відведення (рис. 3):

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x} \quad (4)$$

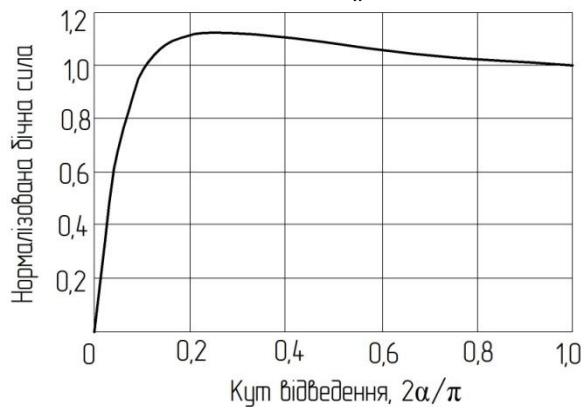


Рисунок 2. – Залежність бічної сили від кута відведення

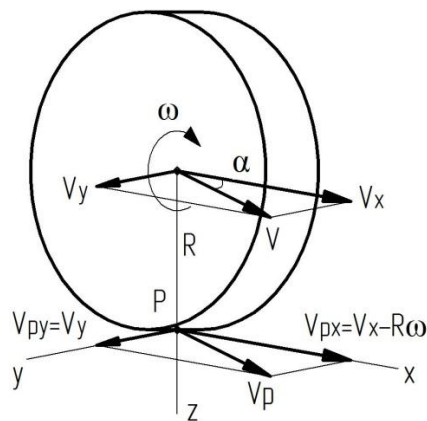


Рисунок 3. – Швидкості колеса при його коченні по опорній поверхні

Рівняння для поздовжньої  $F_x(\beta, s)$  та бічної  $F_y(\beta, s)$  сил для випадку, коли на колесо одночасно діють бічна  $F_y(\beta)$  і гальмівна  $F_x(s)$  сили, мають вигляд [4]:

$$F_x(\alpha, s) = \frac{F_x(s)F_y(s)s}{\sqrt{s^2 F_y^2(\alpha) + F_x^2(s) \tan^2(\alpha)}} \times \frac{s^2 C_\alpha^2 + (1-s)^2 \cos^2(\alpha) F_x^2(s)}{s C_\alpha}; \quad (5)$$

$$F_y(\alpha, s) = \frac{F_x(s)F_y(\alpha) \tan(\alpha)}{\sqrt{s^2 F_y^2(\alpha) + F_x^2(s) \tan^2(\alpha)}} \times \frac{\sqrt{(1-s)^2 \cos^2(\alpha) F_y^2(\alpha) + C_s^2 \sin^2(\alpha)}}{C_s \sin(\alpha)}, \quad (6)$$

де  $C_\alpha$  – коефіцієнт опору відведення шини;

$C_s$  – коефіцієнт поздовжньої сили (коефіцієнт поздовжньої жорсткості шини).

При одночасній побудові графіків за формулами (5) та (6) маємо еліпс сил, що діють на шину (рис. 4).

Однією із популярних програм для відтворення ДТП є програма «PC-Crash», що дозволяє використовувати дві моделі шини – лінійну та TM-Easy.

Замість величини проковзування шини програма передбачає введення параметру, що характеризує постійну величину гальмівної ( $F_b$ ) або тягової ( $F_a$ ) сил. Сила може бути альтернативно задана як частина нормального навантаження на колесо. При відсутності бічної тягова сила задається як  $F_x = F_a$ , а гальмівна -  $F_x = -F_b$ . Бічна сила є білінійною функцією (рис. 6). Лінійна частина характеризується коефіцієнтом опору відведенню  $C_\alpha$ .

На рис. 5 зображено трьохвимірну поверхню, що характеризує залежність поздовжньої сили від параметрів  $s$  та  $\alpha$ .

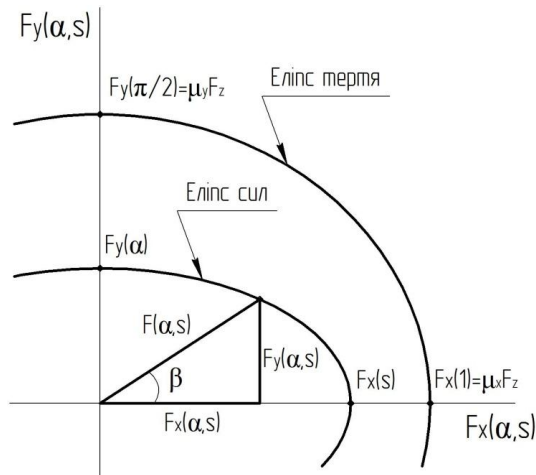


Рисунок 4. – Діаграма еліпса тертя та еліпса сил, що діють на шину

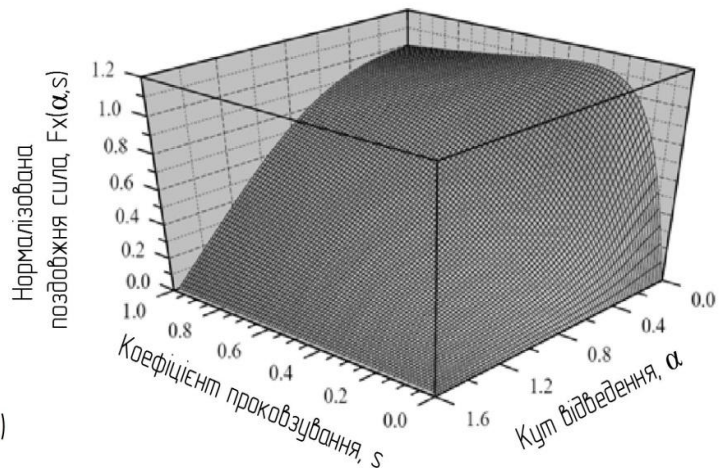


Рисунок 5. – Залежність нормалізованої поздовжньої сили від параметрів  $s$  та  $\alpha$

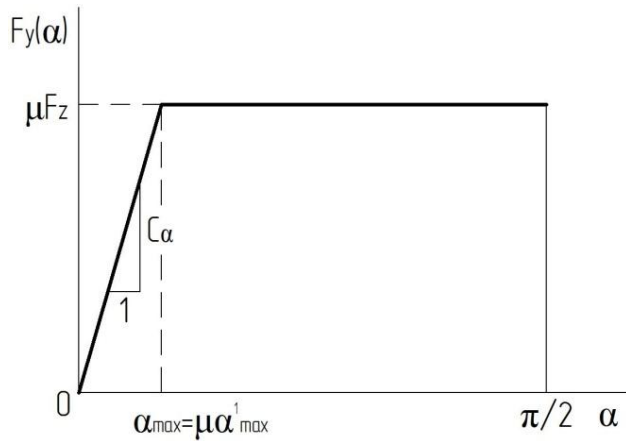


Рисунок 6. – Білінійна модель бічної сили

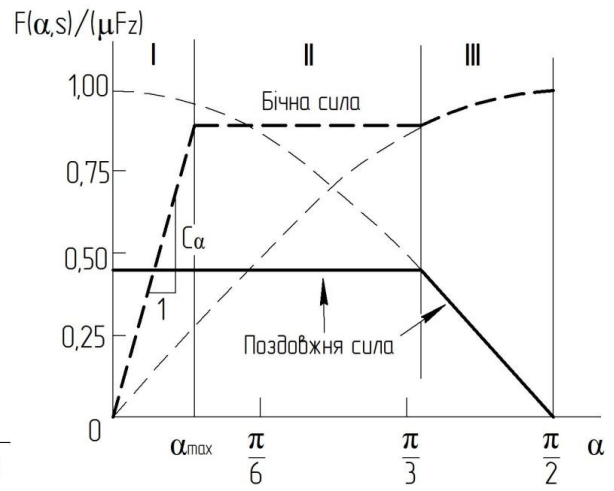


Рисунок 7. – Діаграма сил в рамках лінійної моделі шини PC-Crash

Бічна сила стає постійною при  $\alpha = \alpha_{\max}$ , де бічна сила досягає максимального рівня -  $\mu F_z$ . Для PC-Crash  $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}^1$ , де  $\alpha_{\max}^1$  - кут «насичення» для  $\mu_y = 1$ . Для цього запису коефіцієнт відведення розраховується, як  $C_\alpha = \mu F_z / \alpha_{\max}^1$ . При відсутності поздовжньої сили  $s=0$  ( $F_a = F_b = F_x = 0$ ) система рівнянь для бічної сили має вигляд:

$$\begin{cases} F_x(\alpha) = -\frac{\mu F_z \alpha}{\mu \alpha_{\max}^1}, \text{ для } 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max} = \mu \alpha_{\max}^1; \\ F_y(\alpha) = \mu F_z, \text{ для } \alpha_{\max} < \alpha < \pi/2. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо діє гальмівна сила  $F_x(b,s) = F_b$ , то бічну силу знаходять, використовуючи еліпс тертя, що описується рівнянням (8), де поздовжня гальмівна сила уточнена для стану заблокованих коліс, які ковзають, відповідно до рівняння (9):

$$F_y(\alpha, s) = \min \left[ \mu F_z \frac{\alpha}{\alpha_{\max}}, \sqrt{(\mu F_z)^2 - F_x^2(\alpha, s)} \right]; \quad (8)$$

$$F_y(\alpha, s) = \min [F_b, \mu F_z \cos \alpha]. \quad (9)$$

При комбінованій дії бічної та гальмівної сили лінійну модель можна представити графічно за допомогою діаграми (рис. 7). Область I на рис. 7 відповідає лінійному зростанню бічної сили відповідно до величини коефіцієнта опору відведенню  $C_\alpha$  (рівняння (10)). Область II відповідає постійній та максимальній величині бічної сили, її величина знаходиться за рівнянням (11), що відповідає еліпсу тертя. Область III відповідає заблокованому колесу, що ковзає (рівняння (12)):

$$F_y(\alpha, s) = \mu F_z \frac{\alpha}{\alpha_{\max}}; \quad (10)$$

$$F_y(\alpha, s) = \sqrt{(\mu F_z)^2 - F_b^2}; \quad (11)$$

$$F_y(\alpha, s) = \mu F_z \sin \alpha \quad (12)$$

$$\mu F_z = \sqrt{F_y^2(\alpha, s) + F_b^2} \quad (13)$$

Еліпс тертя, що відповідає діаграмі на рис. 7, показаний на рис. 8. Зі зростанням кута відведення  $\alpha$  від 0 до  $\alpha_{\max}$  бічна сила  $F_y(\beta, s)$  збільшується з точки (0,0) до точки «А». Величина бічної сили у цій точці відповідає силі  $F_b$  та рівнянню (12). В області II, коли кут відведення збільшується на деяку величину від  $\alpha_{\max}$  (рис. 7), результуюча сила залишається незмінною, тобто на рис. 8 сила концентрується в точці «В». В області III сила  $F_y(\alpha, s)$  йде від точки «В» до точки «С» (кут  $\alpha$  продовжує збільшуватись) по фрикційному колу. Слід відмітити, що для області II буде мати силу рівняння (13).

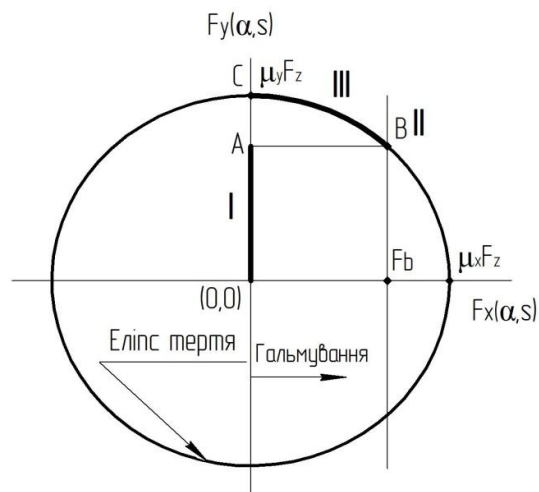


Рисунок 8. – Еліпс тертя при одночасній дії бічної та поздовжньої сил

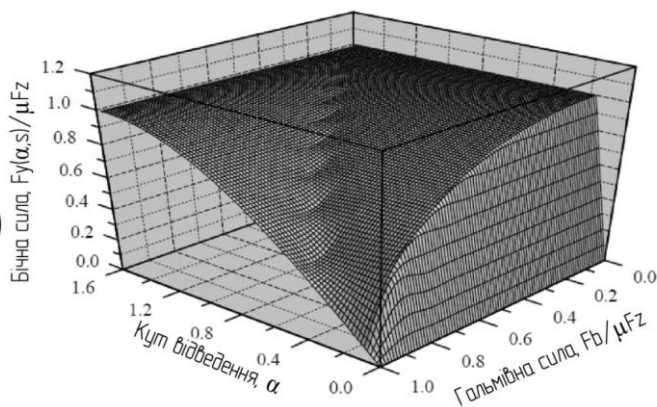


Рисунок 9. – Залежність бічної сили від кута відведення та гальмівної сили (лінійна модель PC-Crash)

Хоча напрямок дії сили  $F_y(\beta, s)$  співпадає з напрямком ковзання, величина результуючої сили ідентична повному проковзуванню ( $\mu F_z$ ). Графічне зображення поверхні сили  $F_y(\alpha, s)$  показано на рис.9. Друга модель, що використовується в програмі «PC-Crash» – TM-Easy Tire Model [5]. Ця модель використовується при трьохвимірному русі автомобіля. В основу розроблених залежностей покладено, що кут розвалу дорівнює нулю та ігноруються моменти в плямі контакту шини та дороги. Поздовжнє проковзування та кут відведення відрізняється від описаних вище [4].

Рівняння для поздовжнього та поперечного проковзування має вигляд відповідно:

$$s_x = \frac{V_{px}}{R\omega}; \quad s_y = \frac{V_y}{R\omega} \quad (14)$$

де  $V_{px}$ ,  $V_y$  – проєкції швидкостей проковзування шини на вісь x та y (див. рис. 3).

Проковзування при одночасній дії поздовжньої та поперечної сил визначається за формулами:

$$s_x(s, \alpha) = \frac{s}{1-s}; \quad s_y(s, \alpha) = \frac{\tan \alpha}{1-s} \quad (15)$$

TM-Easy визначає, що при деякому граничному значенні  $s_{xf}$ , досягається повне проковзування шини. Модель характеризує максимальне значення поздовжньої сили шляхом задавання максимального значення коефіцієнта проковзування ( $s_{xm}$ ,  $F_{xm}$ ). На рис. 10 показана поздовжня сила як функція проковзування  $s_x$ .

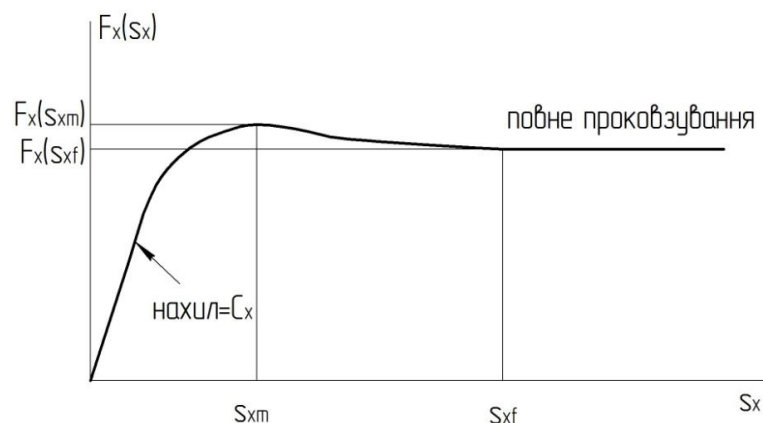


Рисунок 10. – Графік поздовжньої сили, модель шини TM-Easy

Для повного описання моделі необхідні три складові графіка (рис. 10), що дають можливість повністю представити вигляд кривої  $F_x(s_x)$ : початковий нахил ( $C_x$ ), максимальний рівень сили з відповідним коефіцієнтом проковзування ( $s_{xm}$ ,  $F_{xm}$ ), рівень сили, що відповідає початку повного проковзування з відповідним коефіцієнтом ( $s_{xf}$ ,  $F_{xf}$ ). Крива бічної сили описується аналогічно: [ $(C_x)$ ,  $(s_{ym}$ ,  $F_{ym})$ ,  $(s_{yf}$ ,  $F_{yf})$ ].

Описане вище стосується випадку відсутності бічного проковзування для поздовжньої сили та поздовжнього проковзування для бічної сили. Випадок одночасної дії поздовжньої та бічної сил описаний далі.

Загальний коефіцієнт проковзування, що визначає поздовжню та бічну сили визначається рівнянням (16), в якому величини  $s_x$  та  $s_y$  - нормалізовані змінні проковзування, що визначаються рівняннями (17) та (18):

$$s_{xy} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{C_x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{C_y}\right)^2}; \quad (16)$$

$$s_x = \frac{s_{xm}}{s_{xm} + s_{ym}} + \frac{F_{xm} / C_x}{F_{xm} / C_y + F_{ym} / C_y}; \quad (17)$$

$$s_y = \frac{s_{ym}}{s_{xm} + s_{ym}} + \frac{F_{ym} / C_x}{F_{xm} / C_y + F_{ym} / C_y}. \quad (18)$$

У рівняннях (19) – (23) наведено параметри до моделі TM-Easy [4]:

$$C = \sqrt{(C_x s_x \cos \varphi)^2 + (C_y s_y \sin \varphi)^2}; \quad (19)$$

$$s_m = \sqrt{\left(\frac{s_{xm} \cos \varphi}{C_m}\right)^2 + \left(\frac{s_{xm} \sin \varphi}{C_m}\right)^2}; \quad (20)$$

$$F_m = \sqrt{(F_{xm} \cos \varphi)^2 + (F_{ym} \sin \varphi)^2}; \quad (21)$$

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{s_{fx} \cos \varphi}{C_x}\right)^2 + \left(\frac{s_{fy} \sin \varphi}{C_y}\right)^2}; \quad (22)$$

$$F_f = \sqrt{(F_{xf} \cos \varphi)^2 + (F_{yf} \sin \varphi)^2}. \quad (23)$$

Загальна сила  $F(s_x, s_y)$ , що діє в контактї шини з дорогою тепер описується в кожному з трьох областей за допомогою розірваної раціональної функції, кубічного поліному і постійною  $F_f$  та задається рівняннями (24).

$$\begin{cases} F(s_x, s_y) = F_m - (F_m - F_f)\sigma^2(3 - 2\sigma), \sigma = \frac{s_{xy} - s_m}{s_f - s_m}, s_m \leq s_{xy} \leq s_f; \\ F(s_x, s_y) = F_f, s_{xy} > s_f; \\ F(s_x, s_y) = F(s_x, s_y) \cos \varphi \end{cases} \quad (24)$$

Складові поздовжньої (25) та бічної (26) сил визначаються із проєкцій на відповідні осі, використовуючи кут  $\varphi$  (27):

$$F_x(s_x, s_y) = F(s_x, s_y) \cos \varphi; \quad (25)$$

$$F_y(s_x, s_y) = F(s_x, s_y) \sin \varphi; \quad (26)$$

$$\cos \varphi = \frac{s_x / C_x}{s_{xy}}; \quad \sin \varphi = \frac{s_y / C_y}{s_{xy}}. \quad (27)$$

Графічне зображення поверхонь бічної та поздовжньої сил показано на рис.11.

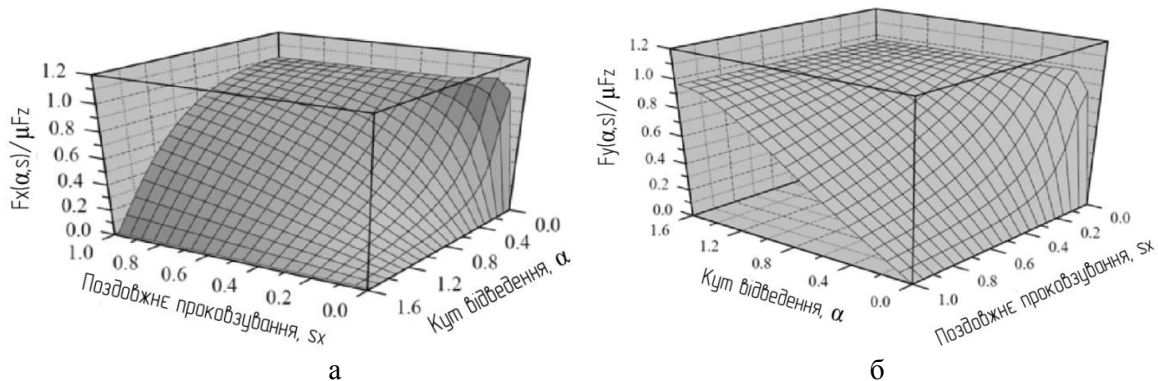


Рисунок 11. – Графік нормалізованих поздовжньої (а) та бічної (б) сил відповідно до моделі ТМ-Easy

## Висновок

Розглянуто три моделі шини, що використовуються при моделюванні руху автомобілів. Кожна з розглянутих моделей дозволяє описувати бічне відведення із врахуванням дії поздовжніх сил, зокрема, гальмівної, що важливо при відтвореннях дорожньо-транспортних пригод.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. About VCRware [Електронний ресурс]. – Режим доступу до докум.: [http://www.brachengineering.com/about\\_vcrware.htm](http://www.brachengineering.com/about_vcrware.htm) - Назва з екрану.
2. Pacejka H.B. The magic formula tyre modell. / H.B. Pacejka, E. Bakker // Prog. 1stCollog. Models for Vehicle Dynamics Analysis. Delft, 1991. – Amsterdam : Swits and Zeitlinger. – 1993. – P. 1 – 18.
3. Костенко А.В. До питання про дослідження курсової стійкості руху легкових автомобілів / Костенко А.В. // Вісник Донецької академії автомобільного транспорту. – 2010. – № 3. – С. 72 – 77.
4. Brach Raymond M. Tire Models for Vehicle Dynamic Simulation and Accident Reconstruction [Електронний ресурс] / Raymond M. Brach, R. Matthew Brach. – Режим доступу до докум.: [http://www.brachengineering.com/publications/2009\\_01\\_0102\\_np.pdf](http://www.brachengineering.com/publications/2009_01_0102_np.pdf) – Назва з екрану.



5. Hirschberg W. User-Appropriate Tyre-Modelling for Vehicle Dynamics in Standart and Limit Situations / W. Hirschberg, G. Rill, H. Weinfurter // Vehicle Systems Dynamics. – Vol. 38, No. 2. – P. 103 – 125.

#### РЕФЕРАТ

Сахно В.П., Костенко А.В., Енглезі О.А., Прогній П.Б. До питання про описання взаємодії автомобільної шини та опорної поверхні. / Володимир Прохорович Сахно, Андрій Вікторович Костенко, Олег Анатолійович Енглезі, Прогній Павло Богданович// Управління проектами, системний аналіз і логістика. – К.: НТУ–2012. – Вип. 10.

У статті розглянуто три моделі шини, що використовуються при моделюванні руху автомобілів. Кожна з розглянутих моделей дозволяє описувати бічне відведення із врахуванням дії поздовжніх сил, зокрема, гальмівної, що важливо при відтворенні дорожньо-транспортних пригод.

Об'єкт дослідження – взаємодія шини з опорною поверхнею.

Мета досліджень – огляд математичних моделей кочення автомобільних шин, що використовуються в програмах, які застосовується для моделювання руху автомобіля взагалі та відтворенні ДТП зокрема.

Метод досліджень – аналітичний.

Розглянуто моделі шин, що використовуються в програмному забезпеченні «VCRware» та «PC-Crash».

Модель шини, що використовується в програмному забезпеченні VCRware являє собою рівняння для поздовжньої та поперечної сил, що є продовженням розвитку «магічної» формули Пацейки. При одночасній побудові графіків з урахуванням поздовжніх та поперечних сил отримано еліпс сил, що діють на шину.

Модель шини, що використовується в програмному забезпеченні PC-Crash, розглядає дві моделі шини – лінійну та ТМ-Easy. Замість величини проковзування шини програма передбачає введення параметру, що характеризує постійну величину гальмівної або тягової сили. Сила може бути альтернативно задана як частина нормального навантаження на колесо. Бічна сила є білінійною функцією. Лінійна частина характеризується коефіцієнтом опору відведенню.

При комбінованій дії бічної та гальмівної сили лінійну модель можна представити графічно у вигляді еліпсу тертя. Модель характеризує максимальне значення поздовжньої сили шляхом задавання максимального значення коефіцієнта проковзування.

Кожна з розглянутих моделей дозволяє описувати бічне відведення із врахуванням дії поздовжніх сил, зокрема, гальмівної, що важливо при відтворенні дорожньо-транспортних пригод.

Результати статті можуть бути використані при описі бічного відведення автомобільного колеса із врахуванням дії гальмівної сили, що важливо при відтворенні дорожньо-транспортних пригод.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** АВТОМОБІЛЬ, ШИНА, СИЛА, ДОРОЖНЬО-ТРАНСПОРТА ПРИГОДА, БІЧНЕ ВІДВЕДЕННЯ, МОДЕЛЬ

#### ABSTRACT

Sakhno V.P., Kostenko A.V., Englezy O.A., Progniy P.B. To the question about description of co-operation of motor-car tire and underlayment. / Volodymyr Sakhno, Andrey Kostenko, Oleg Englezy, Pavlo Progniy // Management of projects, systems analysis and logistics. - K.: NTU-2012. - Vol. 10.

In the article three models are considered tires which are used for the design of motion of cars. Each of the considered models allows to describe a lateral withdrawal taking into account the action of longitudinal forces, in particular, brake, that is important at the recreation of road traffic accidents.

A research object is co-operating of tire with an underlayment

A purpose of researches is a review of mathematical models of wobbling of motor-car tires, in-use in the programs which used for the design of motion of car in general and recreation of DTP in particular.

Method of researches – analytical.

The models of tires which are utilized in VCRware and PC-Crash software are considered.

Model of tire, which is utilized in VCRware software shows by itself equalizations for longitudinal and transversal forces which are continuation of development of «magic» formula of Pacecky. At the simultaneous construction of the graphs taking into account longitudinal and transversal forces the ellipse of forces which operate on a tire is got.



Model of tire, which is utilized in PC-Crash software, examines two models of tire, – linear and TM-Easy. In place of size of slipping of tire the program foresees introduction of parameter which characterizes the permanent size of brake or hauling force. Force can be alternatively set as part of the normal loading on a wheel. Lateral force is a bilinear function. Linear part is characterized the coefficient of resistance a withdrawal.

At the combined action of lateral and brake forces a linear model can be presented graphicly as an ellipse of friction. A model is characterized by the maximal value of longitudinal force by the task of maximal value of coefficient of slipping.

Each of the considered models allows to describe a lateral withdrawal taking into account the action of longitudinal forces, in particular, brake, that is important at the recreation of road traffic accidents.

Can be drawn on the results of the article at description of lateral withdrawal of motor-car wheel taking into account the action of brake force, that is important at the recreation of дорожно-транспортных adventures.

**KEYWORDS:** AUTOMOBILE, TIRE, FORCE, ROAD TRAFFIC ACCIDENT, LATERAL WITHDRAWAL, MODEL

#### РЕФЕРАТ

Сахно В.П., Костенко А.В., Енглези О.А., Прогний П.Б. К вопросу об описании взаимодействия автомобильной шины и опорной поверхности. /Владимир Прохорович Сахно, Андрей Викторович Костенко, Олег Анатолиевич Енглези, Прогний Павел Богданович // Управление проектами, системный анализ и логистика. – К.: НТУ–2012. – Вып. 10.

В статье рассмотрены три модели шины, которые используются при моделировании движения автомобилей. Каждая из рассмотренных моделей позволяет описывать боковой увод с учетом действия продольных сил, в частности, тормозной, что важно при воссоздании дорожно-транспортных происшествий.

Объект исследования – взаимодействие шины с опорной поверхностью.

Цель исследований – обзор математических моделей качения автомобильных шин, используемых в программах, которые применяется для моделирования движения автомобиля вообще и воссоздании ДТП в частности.

Метод исследований – аналитический.

Рассмотрены модели шин, которые используются в программном обеспечении «VCRware» и «PC-Crash».

Модель шины, которая используется в программном обеспечении VCRware являет собой уравнения для продольной и поперечной сил, которые являются продолжением развития «магической» формулы Пацейки. При одновременном построении графиков с учетом продольных и поперечных сил получен эллипс сил, которые действуют на шину.

Модель шины, которая используется в программном обеспечении PC-Crash, рассматривает две модели шины – линейную и TM-Easy. Вместо величины проскальзывания шины программа предусматривает введение параметра, который характеризует постоянную величину тормозной или тяговой силы. Сила может быть альтернативно задана как часть нормальной нагрузки на колесо. Боковая сила является билинейной функцией. Линейная часть характеризуется коэффициентом сопротивления уводу.

При комбинированном действии боковой и тормозной сил линейную модель можно представить графически в виде эллипса трения. Модель характеризует максимальное значение продольной силы путем задания максимального значения коэффициента проскальзывания.

Каждая из рассмотренных моделей позволяет описывать боковой увод с учетом действия продольных сил, в частности, тормозной, что важно при воссоздании дорожно-транспортных происшествий.

Результаты статьи могут быть использованы при описании бокового увода автомобильного колеса с учетом действия тормозной силы, что важно при воссоздании дорожно-транспортных приключений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** АТОМОБИЛЬ, ШИНА, СИЛА, ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНОЕ ПРОИСШЕСТВИЕ, БОКОВОЙ УВОД, МОДЕЛЬ.