

Объект исследования - буровая колонна в криволинейном канале достаточно глубокой скважины.

Цель статьи состоит в построении аналитических решений и получении замкнутых выражений, определяющих критические значения осевой сжимающей или растягивающей силы и крутящего момента, силы контактного взаимодействия БК и стенок скважины, углы подъема спирали и другое с целью прогнозирования закритического поведения БК как в вертикальных, так и в наклонно-направленных скважинах.

Методы исследования - теория гибких криволинейных стержней, метод приведения прямых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений к обратным задачам и метод Рунге-Кутты.

Результаты статьи могут быть использованы на предприятиях нефтяной, газовой и угольной промышленности Украины при проектировании технологий прокладки достаточно глубоких криволинейных скважин.

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования - поиск оптимальной технологии бурения криволинейных скважин.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** СВЕРХДЛИННЫЕ БУРИЛЬНЫЕ КОЛОННЫ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СКВАЖИНЫ, ВНУТРЕННИЕ И ВНЕШНИЕ СИЛЫ, ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, КРИТИЧЕСКИЕ И ЗАКРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ.

УДК 539.3

### РІЗНИЦЕВО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Марчук О.В., доктор технічних наук,  
Рассказов О.О., доктор технічних наук,  
Гнедаш С.В.

В останні роки увагу дослідників привертають різні схеми чисельно-аналітичних методів, зокрема [1-4]. Це обумовлено з одного боку необхідністю більш точного розрахунку конструкцій, що мають суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, з другого боку можливістю сучасних комп'ютерів та відповідних засобів програмування.

В цьому повідомленні розроблено варіант різницево-аналітичного методу стосовно розрахунку циліндричних оболонок в осесиметричному напружено-деформованому стані. Підхід заснований на розділенні циліндричної оболонки по товщині концентричними поверхнями на ряд складових циліндричних оболонок. Кожна з цих складових оболонок мають свою кривизну, визначувану по її серединній лінії. Задовольняючи умовам контакту на зовнішніх поверхнях між складовими оболонками, маємо можливість описувати напружено-деформований стан вихідної оболонки. В плані шукані функції апроксимуються різницевиими співвідношеннями, а їх розподіл за товщиною розшукується на основі аналітичного розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь.

Компоненти тензора деформацій для осесиметричної деформації визначаємо на основі наступних співвідношень:

$$e_{11} = U_{1,1}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} U_r; \quad e_{rr} = U_{r,r}; \quad 2e_{1r} = U_{1,r} + U_{r,1}. \quad (1)$$

Повздовжні та окружні напруження знаходимо з закону Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B_{11} U_{1,1} + B_{1\theta} \frac{1}{r} U_r + B_{1r} \sigma_{rr}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= B_{\theta 1} U_{1,1} + B_{\theta\theta} \frac{1}{r} U_r + B_{\theta r} \sigma_{rr}. \end{aligned} \quad (2)$$

Можна довести, що поведінка циліндричних оболонок при осесиметричному згинанні підкорюється наступній системі диференціальних рівнянь:

$$U_{1,r} + U_{r,1} - \frac{\sigma_{1r}}{G_{1r}} = 0;$$

$$\begin{aligned}
B_{1r}U_{1,1} + B_{\theta r}\frac{1}{r}U_r + U_{r,r} - B_{rr}\sigma_{rr} &= 0; \\
B_{11}U_{1,11} + B_{1\theta}\frac{1}{r}U_{r,1} + \frac{1}{r}\sigma_{1r} + \sigma_{1r,r} - B_{1r}\sigma_{rr,1} &= 0; \\
B_{1\theta}\frac{1}{r}U_{1,1} + B_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}U_r + \sigma_{1r,1} + B_{\theta r}\frac{1}{r}\sigma_{rr} - \frac{1}{r}\sigma_{rr} - \sigma_{rr,r} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Похідні в плані конструкції апроксимуємо центральними різницевиими співвідношеннями. Після цього рівняння (3) для  $i$  – тої точки набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
U_{1i,r} + \frac{U_{r(i+1)} - U_{r(i-1)}}{2\lambda} - \frac{\sigma_{1ri}}{G_{1r}} &= 0; \\
B_{1r}\frac{U_{1(i+1)} - U_{1(i-1)}}{2\lambda} + B_{\theta r}\frac{1}{r}U_{ri} + U_{ri,r} - B_{rr}\sigma_{rri} &= 0; \\
B_{11}\frac{U_{1(i+1)} + 2U_{1i} + U_{1(i-1)}}{\lambda^2} + B_{1\theta}\frac{1}{r}\frac{U_{r(i+1)} - U_{r(i-1)}}{2\lambda} + \frac{1}{r}\sigma_{1ri} + \sigma_{1ri,r} - B_{1r}\frac{\sigma_{rr(i+1)} - \sigma_{rr(i-1)}}{2\lambda} &= 0; \\
B_{1\theta}\frac{1}{r}\frac{U_{1(i+1)} - U_{1(i-1)}}{2\lambda} + B_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}U_{ri} + \frac{\sigma_{1r(i+1)} - \sigma_{1r(i-1)}}{2\lambda} + B_{\theta r}\frac{1}{r}\sigma_{rri} - \frac{1}{r}\sigma_{rri} - \sigma_{rri,r} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Розв'язання системи (5) з урахуванням крайових граничних умов матиме наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} \left\{ v_{j1}^{(k)} \right\} \\ \left\{ w_{j2}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{j3}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \sigma_{j4}^{(k)} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{j1}^{(k)}(1), \dots, \mu_{j1}^{(k)}(j), \dots, \mu_{j1}^{(k)}(J) \\ \mu_{j2}^{(k)}(1), \dots, \mu_{j2}^{(k)}(j), \dots, \mu_{j2}^{(k)}(J) \\ \mu_{j3}^{(k)}(1), \dots, \mu_{j3}^{(k)}(j), \dots, \mu_{j3}^{(k)}(J) \\ \mu_{j4}^{(k)}(1), \dots, \mu_{j4}^{(k)}(j), \dots, \mu_{j4}^{(k)}(J) \end{bmatrix} \left[ C^{(k)} \right], \tag{5}$$

де  $\left\{ v_{j1}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, v_{j1}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  $\left\{ w_{j2}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, w_{j2}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;

$\left\{ \tau_{j3}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, \tau_{j3}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  $\left\{ \sigma_{j4}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, \sigma_{j4}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;

$\left[ C^{(k)} \right]^T = \left[ C_1^{(k)} e^{r\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}}, \dots, C_J^{(k)} e^{r\beta_J^{(k)}} \right]$ ;  $J$  — загальна кількість шуканих функцій в

шарі;  $\beta_j^{(k)}$  — корені характеристичного рівняння розрахункової системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними;  $\mu_{j1}^{(k)}(j), \mu_{j2}^{(k)}(j), \mu_{j3}^{(k)}(j), \mu_{j4}^{(k)}(j)$  — її власні вектори;  $C_j^{(k)}$  — постійні інтегрування, визначувані з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі різницевої сітки.

Збіжність запропонованого методу продемонструємо на прикладі однорідної ізотропної циліндричної оболонки з наступними фізико-механічними характеристиками:  $a/h=10$ ,  $R/h=50$ ,  $E_1 = E_\theta = E_r$ ,  $\nu_{1\theta} = \nu_{1r} = \nu_{\theta r} = 0.3$ . Оболонку навантажено на внутрішній поверхні нормальним навантаженням, розподіленим по закону синуса. Обпирання на контурі шарнірно-рухоме. Розглядаємо половину оболонки. Результати розрахунку (розрахункові величини представлені на зовнішніх поверхнях оболонки) при різному поділу оболонки в плані на ділянки приведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Густина різницевої сітки	5	10	20	40	80	[5]
$\bar{U}_1 = U_1 E_r / (q_{31} h)$	136.2 -106.0	134.9 -105.3	134.6 -105.1	134.6 -105.0	134.5 -105.0	134.5 -104.9
$\bar{U}_r = U_r E_r / (q_{31} h)$	802.0 796.8	785.7 780.6	781.7 776.6	780.7 775.6	780.4 775.3	780.4 775.2
$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} / q_{31}$	-41.32 41.20	-41.59 41.28	-41.65 41.30	-41.67 41.30	-41.67 41.31	-41.68 41.31
$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / q_{31}$	3.507 28.14	3.097 27.84	2.996 27.77	2.970 27.75	2.964 27.74	2.962 27.74

З таблиці 1 видно, що при збільшенні щільності різницевої сітки результати наближуються до точного розв'язку [5].

В якості другого прикладу розглянемо ізотропну тришарову циліндричну оболонку з наступними фізико-механічними характеристиками:  $a/h=10$ ,  $R/h=5$ ,  $E^{(1)}/E^{(2)}=100$ ,  $E^{(1)}=E^{(3)}$ ;  $\nu^{(1)}=\nu^{(2)}=\nu^{(3)}=0.3$ ;  $2h^{(1)}=h^{(2)}=2h^{(3)}=0.5$ . Контакт шарів жорсткий  $\sigma_{rr}^{(k)}=\sigma_{rr}^{(k-1)}$ ,  $U_r^{(k)}=U_r^{(k-1)}$ ,  $\sigma_{1r}^{(k)}=\sigma_{1r}^{(k-1)}$ ,  $U_1^{(k)}=U_1^{(k-1)}$ . Оболонка обтискається рівномірним локальним навантаженням на зовнішній поверхні в центрі ( $\sigma_{rr}^{(1)}=0$ ,  $\sigma_{r1}^{(1)}=0$ ;  $\sigma_{rr}^{(K+1)}=q_r$  в точках під навантаженням і  $\sigma_{rr}^{(K+1)}=0$  в точках зовні навантаження,  $\sigma_{r1}^{(K+1)}=0$ ). Величина зони навантаження дорівнює висоті. Половина оболонки розбивається на 100 ділянок. Результати розрахунку ( $\bar{U}_r = U_r E_r / (q_{31} h)$ ,  $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} / q_{31}$ ,  $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / q_{31}$ ) приведені у таблиці 2 (M1– розроблена модель; M2– модель[5]).

Таблиця 2

Номер слоя	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{11}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2
1	-0.2845	-0.2846	2.4730	2.4789	-5.5796	-5.5816
	-0.2810	-0.2812	1.9590	1.9698	-5.4427	-5.4433
2	-0.2810	-0.2812	-0.1421	-0.1423	-0.2161	-0.2164
	-0.4610	-0.4616	-0.2122	-0.2125	-0.3142	-0.3147
3	-0.4610	-0.4616	1.7965	1.8017	-8.4044	-8.4158
	-0.4560	-0.4566	-4.1048	-4.1119	-9.8220	-9.8365

Таким чином, розроблено новий різницево-аналітичний метод розрахунку циліндричних оболонок. Продемонстрована задовільна збіжність запропонованого метода. Показана можливість застосування цього метода при розрахунку циліндричних оболонок у разі навантаження локальними навантаженнями.

#### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472с.
2. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К., НИИ СМ, 1993. – 376с.
3. Марчук А.В., Пискунов В.Г. Расчет слоистых конструкций полуаналитическим методом конечных элементов // Механика композитных материалов. – 1997. – 33, №6, с.781–785.

4. Марчук А.В., Пискунов В.Г. Применение полуаналитического метода конечных элементов для решения задач устойчивости слоистых конструкций с отслоениями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1998. – 4, №3, с.3–8.

5. Марчук А.В., Ильченко Я.Л., Гнедаш С.В. Анализ напряженно-деформированного состояния толстых цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 2011. – Т47, №4, с.119-126.

#### РЕФЕРАТ

Марчук О.В., Рассказов О.О., Гнедаш С.В. Різницево-аналітичний метод розрахунку осесиметричних циліндричних оболонок. / Олександр Васильович Марчук, Олександр Олегович Рассказов, Сергій Вікторович Гнедаш // Вісник НТУ – К.: НТУ, 2012. – Вип. 26.

В останні роки увагу дослідників привертають різні схеми чисельно-аналітичних методів, зокрема. Це обумовлено з одного боку необхідністю більш точного розрахунку конструкцій, що мають суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, з другого боку можливістю сучасних комп'ютерів та відповідних засобів програмування.

Розроблено новий різницево-аналітичний метод розрахунку циліндричних оболонок. Особливістю метода є розділення циліндричної оболонки по товщині концентричними колами на ряд складових циліндричних оболонок. Кожна з цих складових оболонок має свою кривизну, визначувану по її серединній лінії. Задовольняючи умовам контакту на зовнішніх поверхнях між складовими оболонками, маємо можливість описувати напружено-деформований стан заданої оболонки. В плані оболонки шукані функції апроксимуються різницеvими співвідношеннями. Розподіл шуканих функцій за товщиною оболонки визначається шляхом розв'язання відповідної системи рівнянь.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЦИЛІНДРИЧНІ ОБОЛОНОКИ, РІЗНИЦЕВО АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД, ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦІЙ.

#### ABSTRACT

Marchuk O.V., A. Rakazov O.O., Hnedash S.V. Difference-analytical method for calculating osesymetrynyh cylindrical shells. / Alexander Marchuk, Oleksandr O. Story, Sergey V. Gnedash // Visnyk NTU. – K.: NTU. – 2012. – Vol. 26.

In recent years attracted the attention of researchers for various schemes of numerical and analytical methods in particular. This is due on the one hand the need for more precise analysis of structures with significant spatial character of the stress-strain state, on the other hand the ability of modern computers and related programming tools.

A new difference-analytical method for calculating the cylindrical shells. Feature of the method is the separation of the cylindrical shell thickness concentric circles on a number of components of cylindrical shells. Each of these components has its membrane curvature, determined by its midline. Satisfying the conditions on the outer surfaces of contact between the constituent shells are able to describe the stress-strain state of a given shell. In terms of shell unknown functions are approximated by difference ratios. Distribution desired functions for shell thickness is determined by solving the corresponding system of equations.

**KEY WORDS:** axisymmetric cylindrical shells difference ANALTYCHNYY METHOD, strain tensor.

#### РЕФЕРАТ

Марчук А.В., Рассказов А.А., Гнедаш С.В. Разностно-аналитический метод расчета осесимметрических цилиндрических оболочек. / Александр Васильевич Марчук, Александр Олегович Рассказов, Сергей Викторович Гнедаш // Вестник НТУ - К.: НТУ, 2012. - Вип. 26.

В последние годы внимание исследователей привлекают различные схемы численно-аналитических методов, в частности. Это обусловлено с одной стороны необходимостью более точного расчета конструкций, имеющих существенно пространственный характер напряженно-деформированного состояния, с другой стороны возможностью современных компьютеров и соответствующих средств программирования.

Разработан новый разностно-аналитический метод расчета цилиндрических оболочек. Особенностью метода является разделение цилиндрической оболочки по толщине концентрическими кругами на ряд составляющих цилиндрических оболочек. Каждая из этих составляющих оболочек имеет свою кривизну, определяемую по ее срединной линии. Удовлетворяя условиям контакта на внешних поверхностях между составляющими оболочками, должны описывать напряженно-деформированное состояние заданной оболочки. В плане оболочки искомые функции аппроксимируются разностными соотношениями. Распределение искомым функций по толщине оболочки определяется путем решения соответствующей системы уравнений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ОСЕСИМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИЛІНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКИ, РАЗНОСНО- АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД, ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦІЙ.