

## НЕСНА ЗДАТНІСТЬ ПОЛОЖИСТИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Дехтяр А.С., доктор технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна

## LOAD CARRYING CAPACITY OF SHALLOW SHELLS

Dekhtyar A.S., D. Sci., National Transport University, Kyiv, Ukraine

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Дехтяр А.С., доктор технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина

Сутність проблеми. Тонкі положисті оболонки використовуються як елементи приладів і машин, а в будівництві – як великопрольотні покриття промислових і громадських споруд. Найчастіше такі оболонки мають постійну товщину по всій поверхні, виняток становлять збірні залізобетонні оболонки – покриття. В них умови виготовлення і монтажу елементів вимагають влаштування як мінімум контурних ребер. Після монтажу ребра суміжних елементів об'єднуються, утворюючи систему підкріплювальних ребер оболонки. Якщо ребра розташовано достатньо часто, то при певному співвідношенні між товщиною шкаралупи і розмірами перетинів ребер такі оболонки можуть умовно розглядатися як оболонки сталої товщини.

Існують, проте, оболонки змінної товщини, в яких товщина істотно змінюється по поверхні – безперервно або в ступінчастий спосіб. Причиною нерівномірності розподілу матеріалу може бути

- необхідність зменшити вагу або витрати матеріалів;
- вимушений зсув бетону до країв оболонки – прямокутної або круглої в плані – при невдалому бетонуванні монолітних залізобетонних оболонок середньої положистості;
- радіаційне зміцнення матеріалу оболонки постійної товщини, при цьому змінюється за певним законом границя текучості матеріалу. Таке змінювання зручно в розрахунковій моделі трактувати як зміну товщини при постійних міцносних властивостях.

Нижче розглянуто прямокутні в плані положисті оболонки змінної товщини з серединною поверхнею трансляції при дії рівномірного поперечного навантаження. Для відшукування їх несної здатності при шарнірному і при вільному обпиранні країв застосовано кінематичний метод теорії граничної рівноваги, він призводить до визначення верхньої межі граничного навантаження [1]. Успішність розв'язання такої задачі залежить від вдалого вибору кінематично допустимих полів швидкостей можливих переміщень  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$  в момент перетворення оболонки в механізм з одним ступенем свободи. Для оболонок постійної товщини ці поля добре вивчено [1], але змінна товщина вимагає конструювання інших полів  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$ . Саме такому питанню і присвячено цю роботу.

Стан досліджень. В роботі [2] для оцінки верхньої границі розподіленого навантаження отримано функціонал  $\Phi$ , визначений на множині кінематично допустимих полів швидкостей переміщень  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$

$$Q = \sigma b^2 \min \Phi, \quad (1)$$

Задача полягає в доборі таких полів швидкостей переміщень, які надають мінімум функціоналу  $\Phi$ .

Для дискретизації  $\Phi$  в [2] застосовано метод сіток, відтак варіаційну задачу (1) замінено задачею про мінімум функції  $F_1$ , її незалежними змінними є значення  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$  у вузлах сіткової області. У свою чергу, цю достатньо громіздку задачу можна спростити за рахунок вибору спеціальних *полів*  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$  і звести її до мінімізації  $F_1$  по декількох незалежних змінних.

Нижче наведено приклади розрахунку несної здатності положистої оболонки з трансляційною поверхнею у вигляді еліптичного параболоїда

$$z = f(x^2/a^2 + y^2/b^2), \quad (2)$$

де  $2a, 2b$  – більший і менший прольоти,  $2f$  стріла підйому оболонки. Товщину оболонки, спочатку постійну по всьому полю, позначимо  $h$ . У відповідності з [2] для опису геометрії оболонки використовуємо такі безрозмірні величини  $\gamma = f/a$  – положистість,  $\varepsilon = h/f$  – відносна товщина,  $\psi = a/b$  – конфігурація в плані. Поперечне навантаження інтенсивністю  $q$  рівномірно розподілено по всій поверхні.

Функціонал  $\Phi$  [2] отримано на основі умови пластичності Іогансена, вона в шестивимірному просторі узагальнених напружень може бути представлена гіперпаралелепіпедом.

Для контролю методики розрахунку і відповідної комп'ютерної програми спочатку розглянемо оболонку з матеріалу, що однаково опирається розтягу і стиску, з характеристиками

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0,25, \alpha_9 = 0,14, \gamma = 0,2, \varepsilon = 0,05.$$

В [2] і інших роботах отримано верхню оцінку повного навантаження  $Q$  при шарнірному і при вільному обпиранні країв (в першому випадку всюди  $u(x,y)=0$   $v(x,y)=0$ ). Для безрозмірної величини  $K = Q/(\sigma b^2)$  повного навантаження  $Q$  отримано оцінки

$$K = 1,68 * 10^{-2} \quad (3)$$

– при нерухомому обпиранні країв і

$$K = 1,19 * 10^{-2} \quad (4)$$

– при вільному обпиранні країв.

Кінематичний метод. Перший з наведених результатів в цій роботі підтверджено точно, а другий вдалося поліпшити до величини  $K = 1,10 * 10^{-2}$  за рахунок більш точного добору полів  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  горизонтальних переміщень.

Тепер перейдемо до оболонок змінної товщини. Як перший приклад розглянемо ту ж оболонку, що і в контрольному прикладі, зменшивши відносну товщину з  $\varepsilon = 0,05$  до  $\varepsilon = 0,03$  в межах центральної квадратної ділянки (рис. 1, а і б). Контур оболонки шарнірно закріплено, тому можна прийняти всюди  $u(x,y) = v(x,y) = 0$ .

Для мінімізації функціонала (1) спочатку використовуємо поле  $w(x,y)$  в такій формі

$$w_1(x, y) = xy(2a - x)(2b - y). \quad (5)$$

Легко переконатися в тому, що на контурі оболонки, як і належить при шарнірному обпиранні,  $w(x,y) = 0$ . Формування значень  $w(x,y)$  в законтурних точках виконується програмно. Припускаючи, що зменшення товщини оболонки в середній частині може призвести до локалізації в цій області швидкостей прогинів, на додаток до поля (3) розглянемо поле  $w_2(x, y)$ , яке представимо рівнянням

$$w_2(x, y) = \delta(\exp(-x^2\sigma_1^{-2}\pi^{-1}/2)\exp(-y^2\sigma_2^{-2}\pi^{-1}/2)), \quad (6)$$

де  $\delta$  – амплітуда. Зазвичай поле (6) описує розподіл вірогідності Гаусса. Осьовий перетин поля представлено на рис. 2. Зручність використання такого поля в розглядуваній тут задачі полягає в тому, що, управляючи лише двома незалежними змінними  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , можемо отримати різний ступінь локалізації поля швидкостей прогинів.

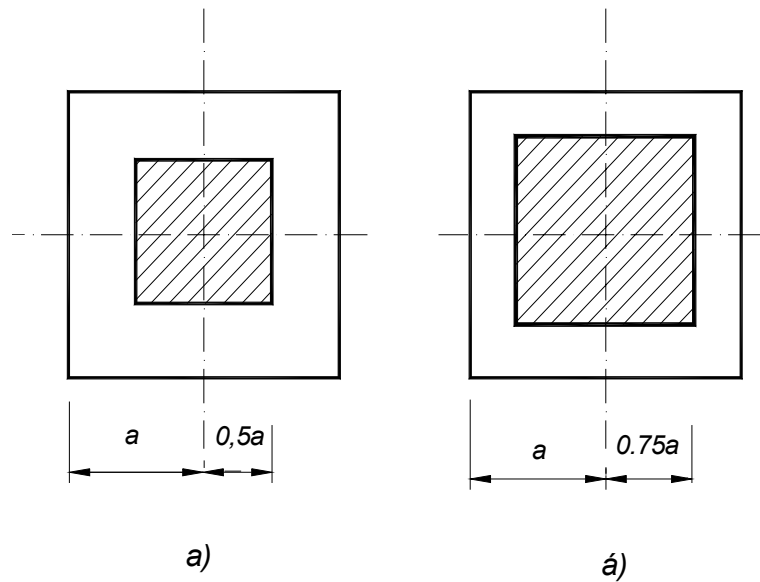


Рисунок 1

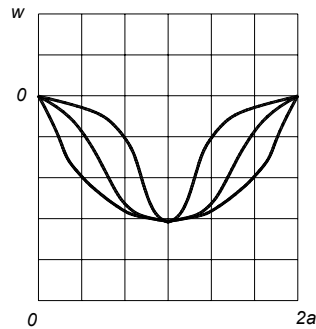


Рисунок 2

Несна здатність. Для кожного розподілу матеріалу при оцінці несної здатності оболонки потрібна конкуренція полів (3) і (4). Верхні оцінки  $10^2 * K$  для обох розподілів товщини (рис.2, а і б) представлено в табл.1 і на рис.3.

Таблиця 1

| Поле швидкостей прогинів | Розподіл товщини |          |
|--------------------------|------------------|----------|
|                          | рис.2, а         | рис. 2,б |
| $w_1(x, y)$              | 1,34             | 1,00     |
| $w_2(x, y)$              | 1,23             | 1,10     |

Ці оцінки дозволяють судити про те, як знизилася несна здатність оболонки раніше постійної товщини  $\varepsilon = 0,05$  ( для неї  $10^2 K = 1,68$  ) унаслідок послаблення квадратної центральної області на 40% – до  $\varepsilon = 0,03$  . Як видно з рис.3, для меншої послабленої області актуальним виявляється поле  $w_1(x, y)$  .

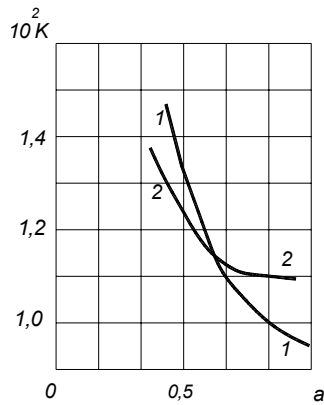


Рисунок 3

В наступній групі прикладів товщина оболонки безперервно зменшується від країв до середини згідно із законом

$$\varepsilon_1(x, y) = \varepsilon(x, y) - \alpha w_2(x, y). \quad (5)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт. Поля  $w_1(x, y)$  і  $w_2(x, y)$  нормовано, і в центрі поля  $w_1(x, y) = w_2(x, y) = 1$ , товщина оболонки в цій точці  $\varepsilon_1(x, y) = \varepsilon(x, y) - \alpha$ . В табл.2 представлено результати обчислень несної здатності оболонок  $10^2 K$  для різних величин  $\varepsilon = 0,015 - 0,045$ .

Таблиця 2

| Поле XX     | Відносна товщина $\varepsilon(x, y)$ в центрі поля |       |       |       |       |
|-------------|--|-------|-------|-------|-------|
|             | 0,045  | 0,041 | 0,035 | 0,025 | 0,015 |
| $w_1(x, y)$ | 1,56   | 1,48  | 1,33  | 1,10  | 0,82  |
| $w_2(x, y)$ | 1,90   | 1,62  | 1,38  | 1,01  | 0,62  |

Тут, як і в попередній групі прикладів, видно, як знижується верхня межа граничного навантаження із зменшенням товщини оболонки від країв до центру. З табл.2 виходить, що при незначному – до 30%- зменшенні товщини в центрі актуальним виявляється поле  $w_1(x, y)$  швидкостей можливих прогинів, а при подальшому зменшенні товщини  $\varepsilon = 0,025$  і  $\varepsilon = 0,015$  мінімум функціоналу (1) надає локалізоване поле  $w_2(x, y)$  швидкостей прогинів.

Третю групу прикладів утворюють оболонки, товщина яких безперервно збільшується від країв до центру за таким же законом (5), для цього необхідно вибирати  $\alpha < 0$ .

Наявність відносно тонких областей поблизу шарнірно обпертих країв оболонки дозволяє і в цій задачі припустити можливу локалізацію поля  $w_3(x, y)$  швидкостей прогинів, наприклад, таку, як показано на рис.4. Ця форма виправдана ще й тим, що саме такий вигляд має поле дійсних (а не віртуальних) прогинів оболонки розглядуваного типу в пружній стадії роботи при рівномірному навантаженні і при обпиранні на пружний контур.

Для опису поля  $w_3(x, y)$  використано рівняння

$$w_3(x, y) = [1 - w_1(x, y)]xy(2a - x)(2b - y). \quad (6)$$

Тут, як і вище, поле  $w_3(x, y)$  можливих швидкостей прогинів використовується в нормованому вигляді з тим, щоб  $w_3(x, y) = 1$  в центрі оболонки.

Результати обчислень зведено до табл.3

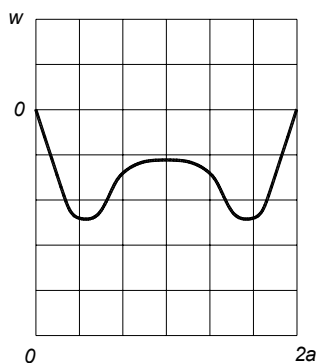


Рисунок 4

Таблиця 3

| Поле $w(x, y)$ | Відносна товщина в центрі оболонки |       |       |       |       |       |
|----------------|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                | 0,070                              | 0,075 | 0,080 | 0,090 | 0,100 | 0,110 |
| $w_1(x, y)$    | 2,14                               | 2,26  | 2,38  | 2,62  | 2,88  | 3,11  |
| $w_3(x, y)$    | 2,18                               | 2,29  | 2,40  | 2,62  | 2,84  | 3,07  |

Потовщення оболонки в її центральній частині помітно збільшує несну здатність в порівнянні з несною здатністю  $1,68 \cdot 10^{-2}$  оболонки з однаковою усюди товщиною  $\varepsilon = 0,05$ . Можна також і в цій групі прикладів знайти точку  $\varepsilon = 0,09$ , в якій повна форма руйнування переходить в локалізовану форму.

Висновок. Результати, представлені тут, показують, що вигляд поля швидкостей можливих переміщень – форма руйнування достатньо чутлива до розподілу матеріалу – місцеве зменшення товщини спричиняє за собою локалізацію форми руйнування.

#### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.:Наука, ГРФМЛ, 1983. – 288 с.
2. Дехтярь А. С., Рассказов А. О. Несущая способность тонкостенных конструкций. – К.: “Будівельник”, 1990. 287 с.

#### REFERENCES

1. Rzhnitsyn A.R. The limit equilibrium of plates and shells//The main editor board of physical and mathematical literature. – Moscow. – 1983. – 288 pp.(Rus)
2. Dekhtyar A.S., Rasskazov A.O, The load carrying capacity of thin-walled structures. – The editor board for building literature. – Kiev. – 1990. – 287 pp.(Rus)

#### РЕФЕРАТ

Дехтярь А.С. Несна здатність положистих оболонок змінної товщини / А.С. Дехтярь // Вісник Національного транспортного університету. – К. : НТУ, 2013. – Вип. 28.

Предмет дослідження – прямокутні в плані положисті оболонки, товщина яких безперервно або в ступінчастий спосіб змінюється по всьому полю. Матеріал оболонки – ідеальний жорсткопластичний з однаковими границями текучості при розтягу і стиску. Для відшукування верхньої межі граничного завантаження застосовано кінематичний метод теорії граничної рівноваги. Розглянуто контрольні приклади, підтверджено правильність методики і відповідної комп'ютерної програми. Розв'язано нові задачі про верхню межу граничного завантаження для оболонок змінної товщини і проведено параметричний аналіз отриманих результатів

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ОБОЛОНКИ, ЗМІННА ТОВЩИНА, НЕСНІСТЬ, КІНЕМАТИЧНИЙ МЕТОД

#### ABSTRACT

Dekhtyar A.S. Load carrying capacity of shallow shells. Visnyk National Transport University. – Kyiv. National Transport University. 2013. – Vol. 28.

The subject of investigation are shallow shells of rectangular configuration. Thickness of shell may change continuously or by step-wise way through the field. Material of shell is ideal rigid – plastic with the identical yield limits at tension and compression. In order to find the upper bound of limit load the kinematical method of limit equilibrium theory is applied. Test examples are considered, the of methodic and proper computer program are confirmed. New tasks are solved for the upper bound of limit load for shells of variable thickness and the parametrical analysis is done for results obtained.

KEYWORDS: SHELLS, VARIABLE THICKNESS, LOAD CARRYING CAPACITY, KINEMATICAL METHOD

#### РЕФЕРАТ

Дехтярь А.С. Несущая способность пологих оболочек переменной толщины / А.С. Дехтярь // Вестник Национального транспортного университета. – К. : НТУ, 2013. – Вып. 28.

Предмет исследования – прямоугольные в плане пологие оболочки, толщина которых непрерывно или ступенчатым образом изменяется по всему полю. Материал оболочки – идеальный жесткопластический с одинаковыми пределами текучести при растяжении и сжатии. Для отыскания верхней границы предельной загрузки применен кинематический метод теории предельного равновесия. Рассмотрены контрольные примеры, подтверждена правильность методики и соответствующей компьютерной программы. Решены новые задачи о верхней границе предельной загрузки для оболочек переменной толщины и проведен параметрический анализ полученных результатов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ОБЛОЧКИ, ПЕРЕМЕННАЯ ТЛДЩИНА, НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ, КИНЕМАТИЧСКИЙ МЕТОД

#### АВТОР

Дехтярь Анатолий Соломонович, доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, тел. 294-9713, Україна, 01010, Київ, вул. Суворова, 1

#### AUTHOR

Dekhtyar Anatol S., D. Sci, professor, Chef of computer graphics and design department, National transport university, phone 294-9713.-Ukraine, Kyiv, Suvorova str., 1

#### АВТОР

Дехтярь Анатолий Соломонович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной, инженерной графики и дизайна, Национальный транспортный университет, тел. 294-9713, Украина, 01010, Киев, ул Суворова, 1

#### РЕЦЕНЗЕНТИ

Киселев Володимир Борисович, доктор технічних наук, професор, декан факультету управління міським господарством Академії муніципального управління

Рассказов Александр Олегович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної в прикладної механіки, Національний транспортний університет

#### REVIEWERS

Kiseliov V.B., Sci. Doctor, prof., Dean of the municipal economy faculty of the Academy of municipal management

Rasskazov A.O. Ssi. Doctor, – Prof., Chef od theoretical and applied mechanics department, National transport university