УДК 539.3
UDC 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ-БЕРНУЛЛІ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ПОШИРЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ АКУСТОЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЬ У СУЦІЛЬНИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРАХ

Лоза І.А., доктор фізико-математичних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна
Попченко Е.О., Національний транспортний університет, Київ, Україна
Рябий С.О., Національний транспортний університет, Київ, Україна

APPLING THE RULE OF BERNOULLI TO SOLVE THE PROBLEM OF AXISYMMETRIC ELECTOELASIC WAVES PROPAGATION IN SOLID PIEZOCERAMIC CYLINDERS

Loza A.I., Dr. of Physics and Mathematics, National Transport University, Kyiv, Ukraine
Popchenko E.A., National Transport University, Kyiv, Ukraine
Ryabiy S.A., National Transport University, Kyiv, Ukraine

ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ-БЕРНУЛЛИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН В СПЛОШНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

Лоза И.А., доктор физико-математических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Попченко Е.А., Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Рябый С.А., Национальный транспортный университет, Киев, Украина

Побудова дисперсійних співвідношень для акустоелектричних хвиль, що поширюються у циліндрі пов'язане з необхідністю розв'язання досить складної задачі про утворення пласких хвиль, які відбиваються від циліндричної границі. Вперше набори частинних розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних (рівняння Ляме) у циліндричних координатах були побудовані в роботах Похгамера [7] та Крі [3,4]. З того часу виконано значну кількість робіт, присвячених дослідженню поведінки акустоелектричних хвиль у циліндричному хвилеводі кругового поперечного перерізу. Зміст проведених досліджень досить повно відображений в оглядах [1,2]. Слід підкреслити, що науковий інтерес до такого об'єкту, як циліндр, зумовлений з однієї сторони практичним значенням геометрії циліндра, а іншого боку – можливістю вивчити вплив кривизни, типу симетрії руху на характеристики хвильового поля. Розв'язуюча система рівнянь, яка описує дану задачу має особливу точку $r = 0$. Навіть для випадку однорідного циліндру отримання аналітичного розв'язку в циліндричних функціях пов'язано зі значними математичними складнощами і можливо лише за умови певної симетрії властивостей матеріалу. Це випадок осьової поляризації п'єзокераміки для повздовжніх хвиль та випадок колової поляризації для крутильних хвиль. Однак після отримання даного розв'язку, при його чисельному аналізі, виникає проблема апроксимації циліндричних функцій степеневими рядами, збіжності степеневих рядів до заданої функції, тощо. Можливо саме тому в роботах [5,6] де отримано аналітичний розв'язок даних задач не наведено результатів чисельного аналізу. Відзначимо, що по сьогоднішній день менш вивченими являються задачі, коли матеріал циліндру являється неоднорідним. Це зумовлено тим, що при зв'язаних видах руху відповідні крайові задачі не допускають розв'язку в циліндричних функціях.

В даній роботі запропоновано застосування правила Лопіталя-Бернуллі для отримання розв'язуючої системи рівнянь, яка не містить особливої точки.

Повна система рівнянь, що описує дану задачу складається з рівнянь осесиметричного повздовжнього руху у циліндричній системі координат (r, θ, z)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_r - 0;$$
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z = 0; \qquad (1)$$

рівнянь електростатики

$$\frac{\partial D_r}{\partial r}+\frac{1}{r}D_r+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0;\ E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r};\ E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \tag{2}$$

геометричних співвідношень

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r};\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}u_r;\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial u_z};\ \varepsilon_{rz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}; \tag{3}$$

та матеріальних співвідношень, які для випадку осьової поляризації мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=c_{11}\varepsilon_{rr}+c_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{13}\varepsilon_{zz}-e_{11}E_z;\\
&\sigma_{\theta\theta}=c_{12}\varepsilon_{rr}+c_{11}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{13}\varepsilon_{zz}-e_{13}E_z;\\
&\sigma_{zz}=c_{13}\varepsilon_{rr}+c_{13}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{33}\varepsilon_{zz}-e_{33}E_z;\\
&\sigma_{rz}=2c_{55}\varepsilon_{rz}-e_{15}E_r;\\
&D_r=2e_{15}\varepsilon_{rz}+\vartheta_{11}E_r.\\
&D_z=e_{13}\varepsilon_{rr}+e_{13}\varepsilon_{\theta\theta}+e_{33}\varepsilon_{zz}+\vartheta_{33}E_z;
\end{aligned} \tag{4}$$

тут σ_{ij} – компоненти тензора механічних напружень, ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, c_{ij} – компоненти тензора модулів пружності, e_{ij} – компоненти тензора п'єзомодулів, ϑ_{ij} – компоненти тензора діелектричних проникностей, E_i – компоненти вектора напруженості електричного поля, D_i – компоненти вектора електричної індукції, u_i – компоненти вектора переміщень, ρ – густина матеріалу, ω – колова частота.

До описаної системи рівнянь необхідно додати граничні умови на бічній поверхні циліндра та умови регулярності в особливій точці $r=0$.

Будемо розглядати такі види граничних умов:

а) бічна поверхня циліндра ($r=R$) вільна від механічних навантажень: $\sigma_{rr}=\sigma_{rz}=0$,

б) бічна поверхня жорстко закріплена: $u_r=u_z=0$.

Електричні граничні умови на бічній поверхні циліндра вибираємо у вигляді:

а) поверхня вкрита тонким електродом $\varphi=0$;

б) поверхня вільна від електродів $D_r=0$.

Виходячи з умов симетрії на осі циліндра маємо:

$$\lim_{r\to 0}\sigma_{rz}=\lim_{r\to 0}u_r=\lim_{r\to 0}D_r=0; \tag{5}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)=0; \tag{6}$$

Як показує практика, для розв'язку подібних задач, розв'язувальний вектор зручно вибирати у змішаному вигляді, до його складу входять ті компоненти тензора механічних напружень, векторів механічних переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу через які формулюються граничні умови. Отже розв'язувальний вектор має вигляд:

$$\mathrm{R}=\left\{\sigma_{rr},\sigma_{rz},\varphi,u_r,u_z,D_r\right\} \tag{7}$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді біжучих хвиль:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}\left(r,z,t\right)=i\sigma_{rr}\left(r\right)e^{i(kz-\omega t)};\ \sigma_{rz}\left(r,z,t\right)=\sigma_{rz}\left(r\right)e^{i(kz-\omega t)};\\
&\varphi\left(r,z,t\right)=\varphi\left(r\right)e^{i(kz-\omega t)};\ u_r\left(r,z,t\right)=iu_r\left(r\right)e^{i(kz-\omega t)};\\
&u_z\left(r,z,t\right)=u_z\left(r\right)e^{i(kz-\omega t)};\ D_r\left(r,z,t\right)=D_r\left(r\right)e^{i(kz-\omega t)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

З першого рівняння (4), використовуючи представлення (8), а також застосувавши правило Лопіталя Бернуллі до невизначеності типу $\left(\frac{u_r}{r}\right)\to\left[\frac{0}{0}\right]$ отримуємо

$$\frac{du_r\left(r\right)}{dr}=\frac{1}{c_{11}+c_{12}}\left[\sigma_{rr}\left(r\right)+k\left(e_{13}\varphi\left(r\right)+c_{13}u_z\left(r\right)\right)\right] \tag{9}$$

Розв'язавши четверте та п'яте рівняння (4) відносно $\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}$ та $\frac{du_z\left(r\right)}{dr}$, отримаємо

$$\frac{d\varphi(r)}{dr}=\frac{e_{15}}{\Delta}\sigma_{rz}(r)-\frac{c_{55}}{\Delta}D_r(r) \tag{10}$$

$$\frac{du_z(r)}{dr}=\frac{\vartheta_{11}}{\Delta}\sigma_{rz}(r)-ku_r(r)+\frac{e_{15}}{\Delta}D_r(r), \tag{11}$$

тут введено позначення $\Delta=c_{55}\vartheta_{11}+e_{15}^2$.

Розривши невизначеність типу $\left(\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}\right)\to\left[\frac{0}{0}\right]$, отримуємо

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{d^2u_r(r)}{dr^2}{}_4=\frac{c_{11}-c_{12}}{2(c_{11}+c_{12})}\left[\frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr}+k\left(e_{13}\frac{d\varphi(r)}{dr}+c_{13}\frac{du_z(r)}{dr}\right)\right]. \tag{12}$$

З першого рівняння (1), враховуючи (12), отримаємо

$$\frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr}=k\frac{2\Delta(c_{11}+c_{12})+\Delta_1(c_{11}-c_{12})}{\Delta(3c_{11}+c_{12})}\sigma_{rz}(r)+\frac{1}{3c_{11}+c_{12}}\left(k^2c_{13}(c_{11}-c_{12})-2\rho\omega^2(c_{11}+c_{12})\right)u_r(r)-\frac{k\Delta_2(c_{11}-c_{12})}{\Delta(3c_{11}+c_{12})}D_r(r), \tag{13}$$

тут введені позначення $\Delta_1=c_{13}\vartheta_{11}+e_{13}e_{15}$, $\Delta_2=c_{13}e_{15}-c_{55}e_{13}$.

З другого рівняння (1), розкривши невизначеність типу $\left(\frac{\sigma_{rz}}{r}\right)\to\left[\frac{0}{0}\right]$, отримуємо

$$\frac{d\sigma_{rz}(r)}{dr}=-k\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}\sigma_{rr}(r)+k^2\frac{(c_{11}+c_{12})e_{33}-2c_{13}e_{13}}{2(c_{11}+c_{12})}\varphi(r)+\left[k^2\frac{(c_{11}+c_{12})c_{33}-2c_{13}^2}{2(c_{11}+c_{12})}-\frac{\rho\omega^2}{2}\right]u_z(r) \tag{14}$$

З рівняння (2), розкривши невизначеність типу $\left(\frac{D_r}{r}\right)\to\left[\frac{0}{0}\right]$, отримуємо

$$\frac{dD_r(r)}{dr}=-k\frac{e_{13}}{c_{11}+c_{12}}\sigma_{rr}(r)-k^2\frac{(c_{11}+c_{12})\vartheta_{33}+2e_{13}^2}{2(c_{11}+c_{12})}\varphi(r)+k^2\frac{(c_{11}+c_{12})e_{33}-2c_{13}e_{13}}{2(c_{11}+c_{12})}u_z(r) \tag{15}$$

Система рівнянь (9)–(11), (13)–(15) має бути доповнена одним з видів граничних умов на бічній поверхні коли $r=R$:

а) $\sigma_{rr}(R)=\sigma_{rz}(R)=\varphi(R)=0$ (16)

б) $\sigma_{rr}(R)=\sigma_{rz}(R)=D_r(R)=0$ (17)

в) $\varphi(R)=u_r(R)=u_z(R)=0$ (18)

г) $u_r(R)=u_z(R)=D_r(R)=0$ (19)

та умовами регулярності в особливій точці $r=0$

$$\sigma_{rz}(0)=u_r(0)=D_r(0)=0 \tag{20}$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\Omega=\omega R\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}};\tilde{c}_{ij}=\frac{c_{ij}}{\lambda};\tilde{e}_{ij}=\frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\lambda}};\tilde{\vartheta}_{ij}=\frac{\vartheta_{ij}}{\varepsilon_0};x=\frac{r}{R};\sigma_{rr}(r)=\lambda U_1(x);\sigma_{rz}(r)=\lambda U_2(x);$$

$$\varphi(r)=R\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}}U_3(x);u_r(r)=RU_4(x);u_z(r)=RU_5(x);D_r(r)=\sqrt{\varepsilon_0\lambda}U_6(x),$$

тут ε_0 – діелектрична проникність вакууму; $\lambda=10^{10}\frac{H}{м^2}$.

Тоді розв'язуюча система набуде вигляду: $\frac{d\mathrm{U}}{dx}=A\mathrm{U}$

$$\frac{dU_1}{dx}=k\frac{2\Delta\left(c_{11}+c_{12}\right)+\Delta_1\left(c_{11}-c_{12}\right)}{\Delta\left(3c_{11}+c_{12}\right)}U_2+\frac{1}{3c_{11}+c_{12}}\left(k^2c_{13}\left(c_{11}-c_{12}\right)-2\Omega^2\left(c_{11}+c_{12}\right)\right)U_4-$$
$$\frac{k\Delta_2\left(c_{11}-c_{12}\right)}{\Delta\left(3c_{11}+c_{12}\right)}U_6,$$
$$\frac{dU_2}{dx}=-k\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}U_1+k^2\frac{\left(c_{11}+c_{12}\right)e_{33}-2c_{13}e_{13}}{2\left(c_{11}+c_{12}\right)}U_3+\left[k^2\frac{\left(c_{11}+c_{12}\right)c_{33}-2c_{13}^2}{2\left(c_{11}+c_{12}\right)}-\frac{\Omega^2}{2}\right]U_5,$$
$$\frac{dU_3}{dx}=\frac{e_{15}}{\Delta}U_2-\frac{c_{55}}{\Delta}U_6 \qquad (21)$$
$$\frac{dU_4}{dx}=\frac{1}{c_{11}+c_{12}}\left[U_1+k\left(e_{13}U_3+c_{13}U_5\right)\right]$$
$$\frac{dU_5}{dx}=\frac{\vartheta_{11}}{\Delta}U_2-kU_4+\frac{e_{15}}{\Delta}U_6,$$
$$\frac{dU_6}{dx}=-k\frac{e_{13}}{c_{11}+c_{12}}U_1-k^2\frac{\left(c_{11}+c_{12}\right)\vartheta_{33}+2e_{13}^2}{2\left(c_{11}+c_{12}\right)}U_3+k^2\frac{\left(c_{11}+c_{12}\right)e_{33}-2c_{13}e_{13}}{2\left(c_{11}+c_{12}\right)}U_5$$

Система рівнянь (21) має бути доповнена одним з видів граничних умов на бічній поверхні коли $x=1$:

а) $U_1\left(1\right)=U_2\left(1\right)=U_3\left(1\right)=0$ (22)

б) $U_1\left(1\right)=U_2\left(1\right)=U_6\left(1\right)=0$ (23)

в) $U_3\left(1\right)=U_4\left(1\right)=U_5\left(1\right)=0$ (24)

г) $U_4\left(1\right)=U_5\left(1\right)=U_6\left(1\right)=0$ (25)

та умовами регулярності в особливій точці $x=0$ – $U_i\left(0\right)<\infty$, $i=\overline{1,6}$.:

$$U_2\left(0\right)=U_4\left(0\right)=U_6\left(0\right)=0 \qquad (26)$$

Отриману крайову задачу (21), (22) – (25), (26) можна інтегрувати чисельним методом, наприклад, методом дискретної ортогоналізації. Перевагою даного підходу є та обставина, що не виникає особливих складнощів при інтегруванні даної задачі зі змінними коефіцієнтами. Наприклад, коли фізико-механічні властивості матеріалу циліндру є не сталими, а функціями товщинної координати. Функції, які описують фізико механічні властивості матеріалу можуть бути як кусково-неперервними (шаруватий матеріал), так і континуально неперервними (градієнтні матеріали). У першому випадку, до вказаних рівнянь, слід додати умови спряження на межах розділу двох матеріалів, у другому випадку необхідно задати закон зміни властивостей матеріалу по товщині.

ПЕРЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Механика композитов: в 12 т. / Под общ. редакцией Гузя А.Н. Т. 9. Динамика элементов конструкций / под редакцией Кубенко В.Д. – К.: ПТОО «А.С.К.», 1999. – 379 с.

2. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР Ин-т механики. – К.: Наук. Думка, 1989. – 280 с.

3. Cree C. Longitudinal vibration of circular bar //Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – 21, № 83/84. – P. 287 – 298.

4. Cree C. The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application //Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Pt III. – P. 250 – 369.

5. Paul H.S. Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric β-quartz// Arch. Mech. Stosow./ 1962, N 5. P. 127 – 134.

6. Paul H.S. Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals// J. Acoust. Soc. Amer. – 1966, 40, N 5. P. 1077 – 1080.

7. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder // J. Reine Angew. Math. – 1876. – **81**, № 4. P. 324 – 336.

REFERENCES

1. Mechanics of Compos: in 12 vol. /under a general release of Guz A.M. V. 9. Dynamics of Elements of Constructions /under release Khubenko V.D. – К.: РТОО «А.С.К.», 1999. – 379 p. (Rus).

2. Mechanics of the Constrained Fields in the Elements of Constructions. T. 5. Elastoelectric / Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga M.A.; Man. edit. Guz A.M.; AS UCCR In-t Mechanics. – К.: Nauk. Dumka, 1989. – 280 p. (Rus).

3. Cree C. Longitudinal vibration of circular bar //Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – 21, № 83/84. – P. 287 – 298.

4. Cree C. The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application //Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Pt III. – P. 250 – 369.

5. Paul H.S. Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric β-quartz// Arch. Mech. Stosow./ 1962, N 5. P. 127 – 134.

6. Paul H.S. Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals// J. Acoust. Soc. Amer. – 1966, 40, N 5. P. 1077 – 1080.

7. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder // J. Reine Angew. Math. – 1876. – **81**, № 4. P. 324 – 336.

РЕФЕРАТ

Лоза І.А. Застосування правила Лопіталя-Бернуллі до розв'язку задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах / І.А. Лоза, Е.О. Попченко, С.О. Рябий // Вісник Національного транспортного університету – К. : НТУ, 2013. — Вип. 28.

В статті запропоновано застосування правила Лопіталя-Бернуллі для отримання розв'язуючої системи рівнянь задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах, яка не містить особливої точки.

Об'єкт дослідження – суцільні п'єзокерамічні циліндри.

Мета роботи виведення розв'язуючої системи рівнянь задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах, яка не містить особливої точки.

Мета дослідження – система рівнянь задачі про поширення осесиметричних акустоелектричних хвиль у суцільних п'єзокерамічних циліндрах, яка не містить особливої точки.

Розв'язуюча система рівнянь, яка описує дану задачу має особливу точку $r = 0$. Навіть для випадку однорідного циліндру отримання аналітичного розв'язку в циліндричних функціях пов'язано зі значними математичними складнощами і можливо лише за умови певної симетрії властивостей матеріалу. Це випадок осьової поляризації п'єзокераміки для повздовжніх хвиль та випадок колової поляризації для крутильних хвиль. Однак після отримання даного розв'язку, при його чисельному аналізі, виникає проблема апроксимації циліндричних функцій степеневими рядами, збіжності степеневих рядів до заданої функції, тощо. Можливо саме тому в роботах де отримано аналітичний розв'язок даних задач не наведено результатів чисельного аналізу. Відзначимо, що по сьогоднішній день менш вивченими являються задачі, коли матеріал циліндру являється неоднорідним. Це зумовлено тим, що при зв'язаних видах руху відповідні крайові задачі не допускають розв'язку в циліндричних функціях.

В даній роботі запропоновано застосування правила Лопіталя-Бернуллі для отримання розв'язуючої системи рівнянь, яка не містить особливої точки. Отриману крайову задачу можна інтегрувати чисельним методом, наприклад, методом дискретної ортогоналізації. Перевагою даного підходу є та обставина, що не виникає особливих складнощів при інтегруванні даної задачі зі змінними коефіцієнтами. Наприклад, коли фізико-механічні властивості матеріалу циліндру є не сталими, а функціями товщинної координати. Функції, які описують фізико механічні властивості матеріалу можуть бути як кусково-неперервними (шаруватий матеріал), так і континуально неперервними (градієнтні матеріали). У першому випадку, до вказаних рівнянь, слід додати умови спряження на межах розділу двох матеріалів, у другому випадку необхідно задати закон зміни властивостей матеріалу по товщині.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: СУЦІЛЬНІ П'ЄЗОКЕРАМІЧНІ ЦИЛІНДРИ, АКУСТОЕЛЕКТРИЧНІ ХВИЛІ

ABSTRACT

Loza I.A., Popchenko E.A., Ryabyi S.O. Applying the rule of Bernoulli to solve the problem of axisymmetric acousticelectrical waves propagation in solid piezoceramic cylinders. Visnyk National Transport University. – Kyiv. National Transport University. 2013. – Vol. 28.

The paper proposes the usage of the rule of Bernoulli to get a system of equations that solves the problem of propagation of axisymmetric acousticelectrical waves in solid piezoceramic cylinders which doesn't have an isolated singularity.

Object of the study - solid piezoceramic cylinders.

Purpose of the study – to draw the system of equations that solves the problem of propagation of axisymmetric acousticelectrical waves in solid piezoceramic cylinders that doesn't have an isolated singularity.

Method of the study - the system of equations that solves the problem of spreading of axisymmetric acousticelectrical waves in solid piezoceramic cylinders, that does not have an isolated singularity.

The solving system of equations describing this problem has an isolated singularity – r=0. Even in case of a homogeneous cylinder acquiring of an analytical solution among cylindrical functions has many mathematical difficulties and can only be possible if the material has certain symmetric properties - axial polarization of longitudinal waves and circular polarization of torsional waves in piezoceramic materials. However, when this solution is found, some other issues, such as a problem of approximation cylindrical functions with power series or convergence of power series with given function, occur during its numerical analysis. All mentioned above could be considered as a main cause of why no numerical results presented in works with analytical solutions. In general the least studied to date are problems, when material is not homogeneous, which can be explained by the fact that the corresponding boundary value problems do not allow to find the solution of cylindrical functions in case of the bound types of movement.

The work proposes to apply the rule of Bernoulli to acquire the solving system of equations, that does not have an isolated singularity. The received boundary value problem can be integrated using a numerical method, for example, the method of discrete orthogonalization can be applied. The advantage of this technique is that there are any considerable difficulties with integrating this value problem with variable coefficients, for instance, if physical and mechanical characteristics of the cylinder are not constant, but functions of thickness coordinates. Functions describing mechanical and physical characteristics can be piecewise continuous (layered material) or continual continuous (functionally graded materials). In the first case, matching conditions at the boundaries should added to given functions between two materials. In the second case, it is necessary to add the law of variation of the material properties through thickness.

KEYWORDS: SOLID PIEZOCERAMIC CYLINERS, ACOUSTELECTRICAL WAVES

РЕФЕРАТ

Лоза И.А. Применение правила Лопиталя-Бернулли к решению задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах / И.А. Лоза, Е.О. Попченко, С.А. Рябый // Вестник Национального транспортного университета. — К. : НТУ, 2013. — Вып. 28.

В статье предложено применение правила Лопиталя-Бернулли для получения разрешающей системы уравнений задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах, которая не содержит особой точки.

Объект исследования – сплошные пьезокерамические цилиндры.

Цель работы – вывод разрешающей системы уравнений задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах, которая не содержит особой точки.

Метод исследования – система уравнений задачи о распространении осесимметричных акустоэлектрических волн в сплошных пьезокерамических цилиндрах, которая не содержит особой точки.

Решающая система уравнений, которая описывает эту задачу, имеет особую точку $r = 0$. Даже для случая однородного цилиндра получение аналитического решения в цилиндрических функциях связано со значительными математическими трудностями и возможно лишь при условии определенной симметрии свойств материала. Это случай осевой поляризации пьезокерамики для продольных волн и случай круговой поляризации для крутильных волн. Однако после получения данного решения, при его численном анализе, возникает проблема аппроксимации цилиндрических функций степенными рядами, сходимости степенных рядов к заданной функции и т.д. Возможно, именно поэтому в работах, где получено аналитическое решение данных задач, не приведены результаты численного анализа. Отметим, что по сегодняшний день менее изученными являются задачи, когда материал цилиндра является неоднородным. Это обусловлено тем, что при связанных видах движения соответствующие краевые задачи не допускают решения в цилиндрических функциях.

В данной работе предложено применение правила Лопиталя-Бернулли для получения разрешающей системы уравнений, которая не содержит особой точки. Полученную краевую задачу можно интегрировать численным методом, например, методом дискретной ортогонализации. Преимуществом данного подхода является то обстоятельство, что не возникает особых сложностей при интегрировании данной задачи с переменными коэффициентами. Например, когда физико-механические свойства материала цилиндра является не постоянными, а функциями толщинной координаты. Функции, описывающие физико-механические свойства материала, могут быть как кусочно-непрерывными (слоистый материал), так и континуально непрерывными (градиентные материалы). В первом случае, к указанным уравнениям, следует добавить условия сопряжения на границах раздела двух материалов, во втором случае необходимо задать закон изменения свойств материала по толщине.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СПЛОШНЫЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЕ ЦИЛИНДРЫ, АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

АВТОРИ:

Лоза Ігор Андрійович, доктор фізико-математичних наук, доцент, Національний транспортний університет, професор кафедри вищої математики, e-mail: dukeigor@mail.ru, тел. +380953195038, Україна, 01010, Київ, вул. Суворова 1, к. 502

Попченко Євген Олександрович, Національний транспортний університет, студент групи АА II 1, e-mail: zhenya-bc@ukr.net, тел. +380953195038, Україна, 01010, Київ, вул. Суворова 1

Рябий Сергій Олександрович, Національний транспортний університет, студент групи АА II 1, e-mail: goofee1995@ukr.net, тел. +380953195038, Україна, 01010, Київ, вул. Суворова 1

AUTHOR:

Loza Igor A., PhD., Physics and Mathematics (Dr), associate professor, National Transport University, professor department of high mathematics, e-mail: dukeigor@mail.ru, tel. +380953195038, Ukraine, 01010, Kyiv, Suvorova str. 1, of. 502.

Popchenko Yevgenyi A., National Transport University, e-mail: zhenya-bc@ukr.net, tel. +380953195038, Ukraine, 01010, Kyiv, Suvorova str. 1.

Ryabyi Sergyi A., National Transport University, e-mail: goofee1995@ukr.net, tel. +380953195038, Ukraine, 01010, Kyiv, Suvorova str. 1.

АВТОРЫ:

Лоза Игорь Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный транспортный университет, профессор кафедры высшей математики, e-mail: zhenya-bc@ukr.net, тел. +380953195038, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова 1, к. 502.

Попченко Евгений Александрович., Национальный транспортный университет, студент группы АА II 1, e-mail: zhenya-bc@ukr.net, тел. +380953195038, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова 1.

Рябый Сергей Александрович., Национальный транспортный университет, студент группы АА II 1, e-mail: goofee1995@ukr.net, тел. +380953195038, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова 1.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гуляєв В.І., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри вищої математики, Київ, Україна

Рассказов О.О., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки, Київ, Україна

REVIEWER:

Gulyayev V.I., PhD., Engineering (Dr), professor, National Transport University, chef department of high mathematics, Kyiv, Ukraine.

Rasskazov A.O., PhD., Engineering (Dr), professor, National Transport University, chef department of theoretical and applied mechanics, Kyiv, Ukraine.