

ВПЛИВ ПОЗДОВЖНЬОЇ СИЛИ НА ФОРМУ СПІРАЛЬНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ  
В НЕСКІНЧЕННИХ ТРУБЧАСТИХ СТЕРЖНЯХ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

Борщ О.І., кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна

INFLUENCE OF LONGITUDINAL FORCE ON THE FORM OF TRAVELING WAVES  
IN SPIRAL INFINITE TUBULAR ROTATING RODS

Borshch O.I., Ph.D., National Transport University, Kyiv, Ukraine

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ НА ФОРМУ СПИРАЛЬНЫХ БЕГУЩИХ ВОЛН  
В БЕСКОНЕЧНЫХ ТРУБЧАТЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ СТЕРЖНЯХ

Борщ Е. И., кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, Киев,  
Украина

Постановка проблеми. В даній роботі поставлена задача дослідження періодичних рухів, які можуть бути здійснені в нескінченних стержнях, що обертаються, та вплив попереднього напруження поздовжніми силами на форми, частоти і швидкості розповсюдження хвиль.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Добування нафтових та газових ресурсів пов'язане із технологічними труднощами проходки глибоких свердловин. Критичні згини випинання бурильної колони (БК) [1-3] та її вібрації, які включають одночасно декілька різних коливальних явищ [4-5], суттєво ускладнюють виділення кожного з них і не дозволяють оцінити і пояснити їх механізми. При аналізі динаміки технічних об'єктів проектувальникам і розраховувачам, як правило, доводиться мати справу з деформованими тілами обмежених розмірів і проводити дослідження на основі постановки крайових задач для рівнянь їх руху. Проте при цьому найчастіше доводиться користуватися механічними і фізичними характеристиками, встановленими при вивченні найбільш загальних закономірностей динамічної поведінки необмежених середовищ і тіл. До таких характеристик відносяться, наприклад, типи і швидкості розповсюдження хвиль та можливості їх розповсюдження без спотворення (недиспергуючі середовища) та зі спотвореннями (диспергуючі середовища) [6-8].

Мета роботи полягає в аналізі впливу поздовжньої сили на форму спіральних біжучих хвиль в нескінченних трубчастих стержнях, що обертаються.

Виклад основного матеріалу. Нехай нескінченний пружний стержень, напружений поздовжньою силою  $T$  і крутним моментом  $M_z$ , обертається з постійною кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  навколо своєї поздовжньої осі. При коливаннях стержня на кожен його елемент діють внутрішні пружні сили та сили інерції, а також зовнішні розподілені сили, викликані потоком рідини при локальному примусовому згинному повороті осі обертання.

Рівняння коливань такого стержня записуються у вигляді [1]

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 u - \\ - 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 v + \\ + 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

За допомогою цієї системи можна досліджувати гармонічні хвилі, що розповсюджуються в стержні. Зазначимо, що незважаючи на її лінійність, вона володіє досить складною структурою, обумовленою наявністю доданків  $M_z \partial^3 v / \partial z^3$ ,  $-M_z \partial^3 u / \partial z^3$  і  $-2\rho F \omega \partial v / \partial t$ ,  $+2\rho F \omega \partial u / \partial t$  в

рівняннях. Так, наявність перших двох доданків приводить до того, що розглядувана система не допускає розв'язків в формі плоскої кривої і пружна лінія вигнутого стержня може бути лише тривимірною кривою (в даному випадку – спіраллю). Наявність других двох доданків приводить до більш складного закону зміни форми коливання як за просторовою, так і часовою координатам, виключаючи можливість руху елементів стержня з однією спільною фазою. Зазначене ускладнення системи (1) вказаними членами пов'язане з тим, що вони містять непарні похідні по  $z$  і  $t$ , а коефіцієнти перед цими доданками утворюють кососиметричні матриці. Сили, пов'язані з цими доданками, здійснюють дестабілізуючий вплив на рівноважний стан системи [2].

Поставлена задача про гармонічні коливання трубчастого попередньо напруженого осьювою силою закрученого стержня, що обертається, являється багатопараметричною. Розв'язки системи будемо будувати у вигляді біжучих циліндричних спіральних хвиль

$$u(z, t) = A \cos(kz - ct), \quad v(z, t) = B \sin(kz - ct), \quad (2)$$

де  $k$  – хвильове число;  $c$  – кругова частота.

Проте циліндрична спіраль біжучої хвилі перестає бути круговою, якщо осьові моменти інерції  $I_x$ ,  $I_y$  поперечного перерізу стержня не однакові [8]. Тоді у співвідношення (1) слід внести відповідні зміни і вони набудуть вигляду

$$\begin{aligned} EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 u - \\ - 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 v + \\ + 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляючи (2) в систему (3), отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} (EI_y k^4 + Tk^2 - \rho F \omega^2 - \rho F c^2)A + (M_z k^3 + 2\rho F \omega c)B = 0, \\ (M_z k^3 + 2\rho F \omega c)A + (EI_x k^4 + Tk^2 - \rho F \omega^2 - \rho F c^2)B = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Встановлено, що при  $A \neq B$  біжуча хвиля набуває форму еліптичної циліндричної спіралі.

Важливою особливістю динамічних процесів, які розглядаються, є те, що на відміну від гармонічних хвиль в нескінченному пружному середовищі і від гармонічних поздовжніх хвиль і хвиль кручення в нескінченних стержнях, які являються недиспергуючими, згинні хвилі розглядуваного типу являються диспергуючими. Це обумовлено тим, що хвильове число  $k$  і кругова частота  $c$  пов'язані нелінійними залежностями. Тому хвилі з різними довжинами поширюються з різними швидкостями. Це приводить до того, що при розглянутих умовах стаціонарними власними хвилями можуть бути лише спіральні хвилі. В нескінченному пружному середовищі стаціонарною хвилею може бути будь-яка поздовжня або поперечна хвиля довільного профілю. Такими ж властивостями володіють довільні поздовжні хвилі і хвилі кручення в нескінченних стержнях.

При розгляданні питання про розповсюдження згинних періодичних хвиль в пружному стержні, принциповим є залучення поняття поляризації хвилі. Воно широко використовується в електромагнітній хвильовій теорії розповсюдження світла. Поперечність електромагнітних хвиль позбавляє кожну хвилю осьової симетрії відносно напрямку розповсюдження через наявність виділених напрямків в площині, перпендикулярній напрямку розповсюдження.

Такими ж властивостями володіють і хвилі в пружних стержнях, що не обертаються, вільних від попереднього напруження крутними моментами. Тоді у випадку кругової поляризації біжучої хвилі (рис. 1, з) осьова лінія стержня набуває форму кругової циліндричної спіралі (лівої або правої), яка рухається у всіх випадках з однією швидкістю для даної довжини, незалежно від напрямку розповсюдження.

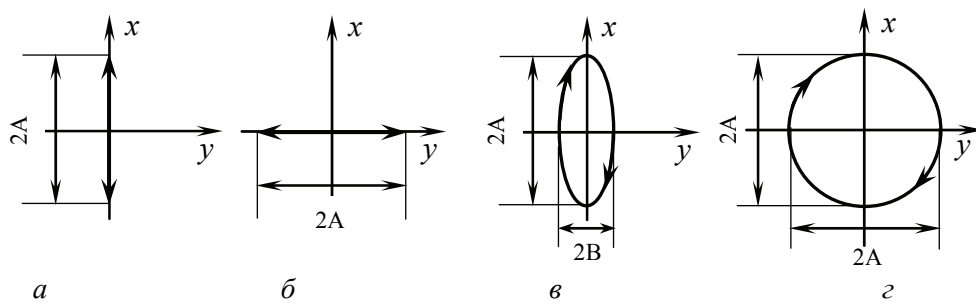


Рисунок 1 – До питання суперпозиції стоячих і біжучих хвиль в оптичних пружних середовищах

Необхідно також підкреслити, що в стержнях, кругового перерізу попередньо напружених крутними моментами, можуть поширюватися лише спіральні біжучі хвилі виду

$$A\cos(kz - ct) + A\sin(kz - ct) = A\cos kz \cdot \cos ct + A\sin kz \cdot \sin ct + A\sin kz \cdot \cos ct - A\cos kz \cdot \sin ct. \quad (5)$$

Кожен із доданків у правій частині (5) не задовольняє хвильове рівняння, яке може бути задоволене лише повною сумою в (5), а окремо кожним доданком – ні. Ця властивість і являється поясненням того, що в стержні, попередньо напруженому крутним моментом, можуть поширюватися лише біжучі спіральні хвилі.

Щоб прослідкувати за механізмом виникнення вказаної закономірності, розглянемо вплив поздовжньої сили на форми періодичних хвиль (стоячих і біжучих).

Динаміка нескінченного стержня попередньо напруженого поздовжньою сталою силою  $T$  описується незв'язаною системою рівнянь

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho_c F_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho_c F_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

з якої слідують частотні залежності (рис.2)

$$c_{1,2} = \pm \frac{k}{\sqrt{\rho_c F_c}} \sqrt{EI k^2 + T}, \quad (8)$$

$$c_{3,4} = \pm \frac{k}{\sqrt{\rho_c F_c}} \sqrt{EI k^2 + T}.$$

Вони свідчать про те, що рухи в площинах  $xOz$  та  $yOz$  в цьому випадку також незв'язані, однак можливі випадки, коли в стержні не можуть поширюватися ніякі згинні хвилі. Така ситуація виникає за умови

$$EI k^2 + T < 0 \quad \text{або} \quad T \leq -EI k^2. \quad (9)$$

Це означає, що для довільної стискаючої поздовжньої сили ( $T < 0$ ) завжди можна знайти такі значення

$$k \leq \sqrt{-T/EI}, \quad (10)$$

при яких коливальні і хвильові періодичні рухи не можливі. Тому залежність (10) можна назвати умовою непропускання біжучих згинних періодичних хвиль в стержні, а значення  $k_{кр} = \sqrt{-T/EI}$  – критичним.

Для ілюстрації встановлених ефектів розглянемо приклади для випадку  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $I = \pi(r_1^4 - r_2^4)/4 = 3,07 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>;  $T = \pm 2 \cdot 10^6$  Н;  $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $F_c = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 5,34 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $r_1 = 0,1775$  м;  $r_2 = 0,99 \cdot r_1$  м. Тут  $r_1, r_2$  – зовнішній і внутрішній радіуси труби БК. Значення наведених механічних параметрів характерні для колон глибокого буріння.

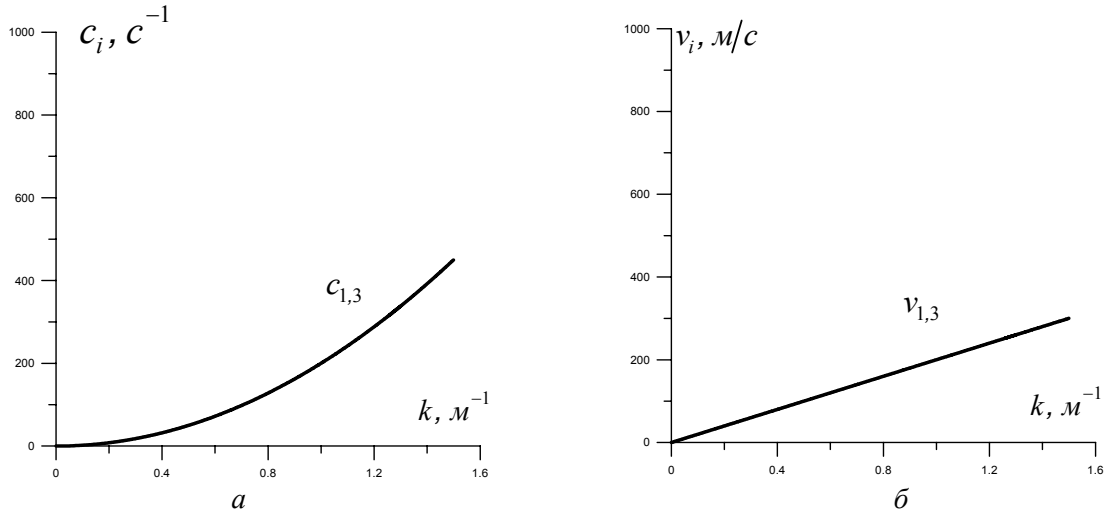


Рисунок 2 – Дисперсійні криві для частот  $c_1, c_3$  (а) та залежності фазових швидкостей  $v_1, v_3$  від довжини хвилі (б) ( $T = 0$ )

Якщо стержень попередньо напружений поздовжньою розтягуючою силою ( $T > 0$ ), то підкореневі вирази в (8) завжди додатні, і при таких  $T$  можливе розповсюдження біжучих періодичних хвиль будь-якої довжини.

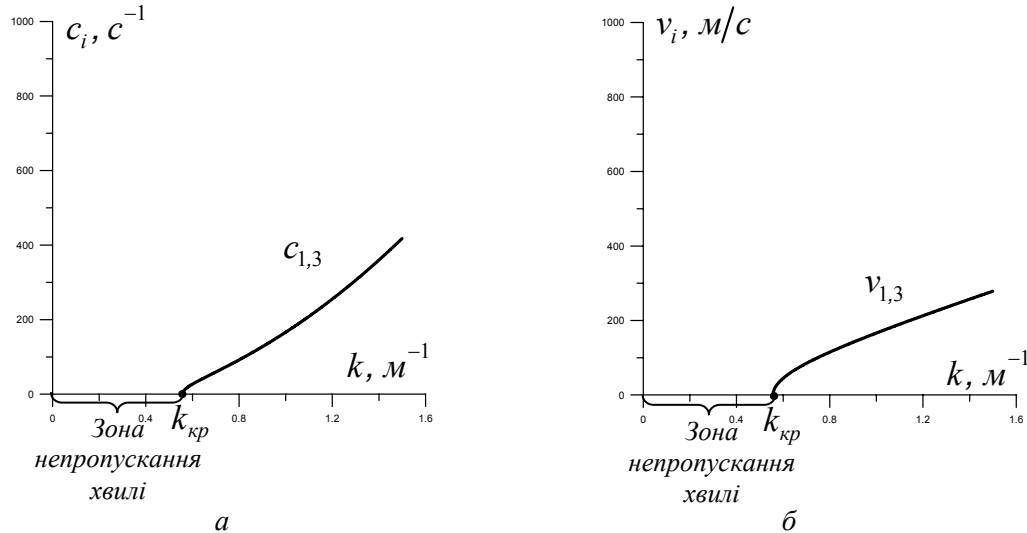


Рисунок 3 – Дисперсійні криві для частот  $c_1, c_3$  (а) та залежності фазових швидкостей  $v_1, v_3$  від довжини хвилі (б) ( $T = -2 \cdot 10^6$  Н)

Висновки. Методами дисперсійного аналізу встановлені найбільш загальні закономірності перебігу вільних хвильових і динамічних процесів в нескінченних стержнях, що обертаються, які піддаються додатковій дії однорідних поздовжніх сил. Виконано аналіз впливу поздовжніх сил на характер вільних періодичних рухів (лише біжучі спіральні хвилі, можливість розповсюдження плоских гармонічних хвиль, можливість вільних коливань за плоскими стоячими гармонічними хвилями).

Показано, що у випадках впливу на нескінченний стержень вказаних силових і кінематичних факторів його власні коливання можуть відбуватися лише за формами біжучих спіральних хвиль. Встановлені ефекти можуть проявлятися в буринних колонах глибокого буріння.

*Робота виконана в рамках держбюджетної теми 0112U000137 «Математичне моделювання процесів безаварійного буріння в сланцевих породах і в шельфових зонах морських акваторій».*

#### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Борщ Е.И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях / Е.И. Борщ, Е.В. Ващилина, В.И. Гуляев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – №2. – С. 143 – 149.
2. Gulyayev V.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, O.I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 — V. 78. – P. 759 – 764.
3. Крауфорд Ф. Волны. М.: Наука, 1976. 528 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
5. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. Киев: Наук. думка, 1992. 344с.
6. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
7. Gulyayev V.I. Torsional vibrations of drilling column bottom structure / V.I. Gulyayev, S.N. Hudoliy, E.I. Borshch // Problems of Strength. – 2010. – №6 (408). – P. 13-26.
8. Гуляев В.И. Спінкові ефекти в спіральних хвилях в закручених стержнях, що обертаються / В.И. Гуляев, О.И. Борщ // Вісник НТУ. – 2008. – №17. – С. 286 – 293.

#### REFERENCES

1. Borshch E.I., E.V. Vashchilina E.V. and Gulyayev V.I. Helical traveling waves in elastic rods. Mechanics of Solids. 2009. No.2. P. 143 – 149 (Rus).
2. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells. Journal of Petroleum Science and Engineering. 2011. V. 78. P. 759 – 764.
3. Krauford F. Waves. M.: Nauka. 1976. 528 p. (Rus).
4. Ziegler H. Principles of Structural Stability. M. Mir. 1971. 192 p. (Rus).
5. Gulyayev V.I., Gaidachuk V.V., Koshkin V.L. Elasyic deforming, Stability and Vibrations of Flexible Curvilinear Rods. Kiev. Naukova Dumka. 1992. 344 p. (Rus).
6. Merkin D.R. Introduction into Theory of Motion Stability. M.: Nauka. 1976. 320 p. (Rus).
7. Gulyayev V.I., Hudoliy S.N., Borshch E.I. Torsional vibrations of drilling column bottom structure. Problems of Strength. 2010. №6 (408). P. 13-26.
8. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Spin effects in spiral waves in twisted rotating rods. Visnyk NTU. 2008. No.17. P.286-293. (Ukr).

#### РЕФЕРАТ

Борщ О.И. Вплив поздовжньої сили на форму спіральних біжучих хвиль в нескінченних трубчастих стержнях, що обертаються / О.И. Борщ // Вісник Національного транспортного університету. Науково-технічний збірник: в 2 ч. Ч. 1: Серія «Технічні науки». – К. : НТУ, 2014. – Вип. 29.

В статті ставиться задача про дослідження періодичних рухів, які можуть бути здійснені в нескінченних стержнях, що обертаються, та вплив попереднього напруження поздовжніми силами на форми, частоти і швидкості розповсюдження хвиль.

Об'єктом дослідження є нескінченний пружний стержень, напружений поздовжньою силою і крутним моментом, обертається з постійною кутовою швидкістю навколо своєї поздовжньої осі.

Мета роботи полягає в аналізі впливу поздовжньої сили на форму спіральних біжучих хвиль в нескінченних трубчастих стержнях, що обертаються.

Методи дослідження включають дисперсійний аналіз, а також алгоритми чисельного інтегрування нелінійних рівнянь.

Результати статті можуть бути упроваджені в практиці теоретичного і експериментального дослідження динаміки колон глибокого буріння в нафтових і газових свердловинах.

Прогнозні припущення щодо розвитку об'єкта дослідження – прогнозування критичних значень поздовжньої сили для забезпечення безаварійного буріння.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** СТЕРЖЕНЬ, ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ, СПІРАЛЬНІ ХВИЛІ, ПОЗДОВЖНЯ СИЛА.

#### ABSTRACT

Borshch O.I. Influence of longitudinal force on the form of traveling waves in spiral infinite tubular rotating rods. Visnyk National Transport University. Scientific and Technical Collection: In Part 2. Part 1: Series «Technical sciences». – Kyiv: National Transport University, 2014. – Issue 29.

The article raises the problem of the study of periodic motions, which can be implemented in infinite rotating rods and the effect of prestressing forces on the longitudinal form, frequency and speed of wave propagation.

Object of study is an infinite elastic rod, the longitudinal force and torque in a rod rotating with a constant angular velocity around its longitudinal axis.

The purpose of this paper is to analyze the effects of longitudinal force on the spiral mode of traveling waves in infinite rotating tubular rods.

Research approaches include methods of dispersion analysis, as well as algorithms for the numerical integration of nonlinear equations.

Our results can be implemented in practice, theoretical and experimental studies of the dynamics of drill strings for deep drilling in oil and gas wells.

Assumptions about the development of the research object – prediction of critical values of the longitudinal force to ensure trouble-free drilling.

**KEYWORDS:** ROD, FREE VIBRATIONS, SPIRAL WAVES, LONGITUDINAL FORCE.

#### РЕФЕРАТ

Борщ Е.И. Влияние продольной силы на форму спиральных бегущих волн в бесконечных трубчатых вращающихся стержнях / Е.И. Борщ // Вестник Национального транспортного университета. Научно-технический сборник: в 2 ч. Ч. 1: Серия «Технические науки». – К. : НТУ, 2014. – Вып. 29.

В статье ставится задача об исследовании периодических движений в бесконечных вращающихся стержнях и влияние предварительного напряжения продольными силами на формы, частоты и скорости распространения волн.

Объектом исследования является бесконечный упругий стержень, напряженный продольной силой и крутящим моментом, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг своей продольной оси.

Цель работы состоит в анализе влияния продольной силы на форму спиральных бегущих волн в бесконечных вращающихся трубчатых стержнях.

Методы исследования включают дисперсионный анализ, а также алгоритмы численного интегрирования нелинейных уравнений.

Результаты статьи могут быть внедрены в практике теоретического и экспериментального исследования динамики колонн глубокого бурения в нефтяных и газовых скважинах.

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования – прогнозирование критических значений продольной силы для обеспечения безаварийного бурения.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** СТЕРЖЕНЬ, СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ, ПРОДОЛЬНАЯ СИЛА.

#### АВТОР:

Борщ Олена Іванівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Національний транспортний університет, e-mail: borshchoi@ukr.net, тел. +380973602263, Україна, 01010, м. Київ, вул. Кіквідзе 42, к. 514.

#### AUTHOR:

Borshch Olena Ivanivna, Ph.D., Senior lecturer Department of Mathematics, National Transport University, e-mail: borshchoi@ukr.net, tel. +380973602263, Ukraine, 01010, Kyiv, Kikvidze str. 42, of. 514.

#### АВТОР:

Борщ Елена Ивановна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный транспортный университет, e-mail: borshchoi@ukr.net, тел. +380973602263, Украина, 01010, г. Киев, ул. Киквидзе 42, к. 514.

#### РЕЦЕНЗЕНТИ:

Рассказов О.О., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

Гайдайчук В.В., доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

#### REVIEWER:

Rasskazov O.O., Dr. Sc., Professor, National Transport University, head of the Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.

Gaidachuk V.V., Dr. Sc., Professor, Kyiv National University of Structures and Architecture, head of the Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.