

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УДАРУ ТВЕРДОГО СФЕРИЧНОГО ТІЛА  
ПО ПОВЕРХНІ ПОРОЖНИНИ У СТИСЛИВІЙ РІДИНІ

Гавриленко О.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри АСОІУ, ФІОТ, НТУУ «КПІ», Київ, Україна

MATHEMATICAL MODELING OF SOLID SHOCK SPHERICAL BODY  
ON THE SURFACE CAVITY IN A COMPRESSIBLE FLUID

Gavrilenko Olena, Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor of Department AIPSM, FICT, NTUU «KPI», Kyiv, Ukraine

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА ТВЕРДОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА  
ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Гавриленко Е.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры АСОИУ, ФИОТ, НТУУ «КПИ», Киев, Украина

**Постановка проблеми.** У наш час експериментально доведена можливість створення підводних транспортних апаратів на основі нових фізичних принципів руху тіл під водою – суперкавітаційного руху. При цьому тіло рухається всередині кавітаційної порожнини, що його оточує, – суперкаверни, і може розвивати швидкість руху, співмірну зі швидкістю поширення звуку у воді.

Однією з проблем суперкавітаційного руху є забезпечення стійкості руху тіла в каверні. За такого руху тіло контактує з поверхнею каверни лише у своїй головній частині. Прикладена до області контакту тіла з поверхнею каверни гідродинамічна сила опору руху з боку рідини створює перекидаючий момент щодо центру мас тіла, викликаючи нестійкість суперкавітаційного руху тіла в рідині. Цією нестійкістю пояснюють виникнення серії поперечних ударів тіла по поверхні каверни, що можуть суттєво впливати на загальний характер руху тіла. Це свідчить про актуальність дослідження процесу удару тіла по поверхні порожнини.

**Аналіз джерел.** У більшості робіт задачі занурення твердих тіл в рідину через поверхню порожнини досліджувались із використанням моделі нестисливої рідини [6, 7, 8]. Модель стисливої рідини, як така, що більш адекватно описує процес взаємодії тіла з рідиною при відносно високих швидкостях [1], використовується в дослідженнях школи В.Д. Кубенка [3, 4].

**Постановка задачі.**

**1. Загальна постановка задачі:** Розглянемо в достатньо загальному вигляді постановку задачі ударної взаємодії твердих тіл з поверхнею порожнини.

Розглянемо механічну систему: в безмежній рідині міститься порожнина, що має форму сфери радіуса  $R_c$ , всередині порожнини міститься абсолютно тверде сферичне тіло радіуса  $R_b$ , вісь якого паралельна вісі порожнини, причому  $R_b < R_c$ . Позначимо через  $d = R_c - R_b$  величину зазору між порожниною та тілом. Тіло під дією сили тяжіння робить поперечні удари по поверхні порожнини. Нехай в початковий момент часу  $t = 0$  воно досягає поверхні порожнини і починає занурюватися крізь неї зі швидкістю  $v_0(t)$ , причому початкова швидкість занурення  $v_0 = v_0(0)$  значно менша за швидкість звуку в рідині.

Спочатку припускаємо, що закон руху тіла в порожнині протягом всієї ударної взаємодії задано. Тоді, виходячи з цього закону та відомої форми поверхні тіла, можна в кожен момент часу визначити частину тіла, що контактує з поверхнею порожнини. Позначимо через  $\Gamma(t)$  поверхню порожнини, причому в початковий момент часу поверхня порожнини знаходиться в недеформованому стані  $\Gamma_0$ . Частину поверхні  $\Gamma(t)$ , через яку відбувається занурення тіла, позначимо через  $\Gamma_1(t)$  (рис. 1).

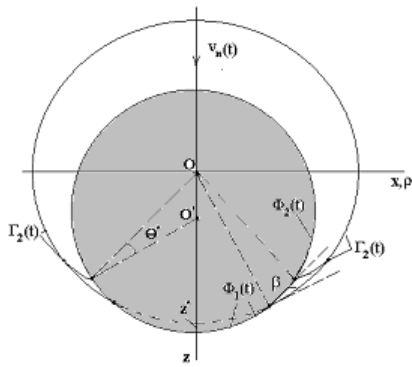


Рисунок 1 – Схема ударної взаємодії тіла з поверхнею порожнини

Позначимо через  $\vec{n}$  орт нормалі до поверхні тіла  $\Phi(t)$ , а через  $v_n$  – проекцію вектора швидкості  $\vec{v}_0$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Надалі буде використовуватися невагома, баротропна, ідеальна, стислива рідина в акустичному наближенні, а швидкості занурення тіла будуть значно меншими за швидкість звуку в рідині.

Тіло при зануренні в рідину через поверхню порожнини породжує в рідині акустичні збурення, рух яких описується хвильовим рівнянням

$$\Delta\varphi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

відносно потенціалу швидкостей  $\varphi$ , який пов'язаний з швидкістю деформування поверхні порожнини  $\vec{V}$  та гідродинамічним тиском  $p$  співвідношеннями

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi; \quad p = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.2)$$

де  $\gamma$  – густина рідини, що знаходиться в стані спокою, при наступних граничних умовах:

- в межах області контакту тіла  $\Phi_1(t)$  з поверхнею порожнини справедлива рівність нормальних складових швидкостей занурення тіла та деформування поверхні порожнини

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Phi_1(t)} = v_n, \quad (1.3)$$

- на вільній поверхні порожнини  $\Gamma_2(t)$  гідродинамічний тиск сталий і для спрощення міркувань вважаємо його рівним нулю

$$-\gamma \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\Gamma_2(t)} = 0, \quad (1.4)$$

що зносяться із області контакту  $\Phi_1(t)$  та з вільної поверхні порожнини  $\Gamma_2(t)$  на недеформовану поверхню порожнини  $\Gamma_0$ .

Акустичні збурення на нескінченності затухають

$$\varphi_\infty = 0. \quad (1.5)$$

Оскільки до початку взаємодії тіла, що знаходиться в порожнині, з рідиною остання залишалася у стані спокою, то будемо мати нульові початкові умови

$$\varphi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (1.6)$$

де за початок процесу можна взяти момент, коли тіло торкається поверхні порожнини  $t = 0$ .

Співвідношення (1.1)-(1.6) являють собою постановку задачі про удар твердого тіла по поверхні порожнини, якщо закон руху тіла в порожнині заданий (границі області контакту  $\Phi_1(t)$ , на основі яких визначаються гідродинамічні навантаження, відомі).

Якщо закон вертикального руху тіла в порожнині невідомий, тоді систему співвідношень (1.1)-(1.6) необхідно доповнити рівнянням вертикального руху тіла, що визначається з другого закону Ньютона

$$\mu \dot{v}_n(t) = -F(t) + \mu g, \quad v_n(0) = v_0, \quad (1.7)$$

де  $\mu$  – маса тіла,  $v_0(t)$  – нормальна складова швидкості занурення тіла,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $F(t)$  – гідродинамічна сила опору зануренню тіла з боку рідини, яка дорівнює інтегралу від гідродинамічного тиску, що розподілений по області контакту тіла з поверхнею порожнини  $\Phi_1(t)$ , і визначається із співвідношення

$$F(t) = 2 \int_0^{\theta^*} p(t, \theta) \cos \theta d\theta. \quad (1.8)$$

Границя області контакту тіла з поверхнею порожнини визначається точками перетину двох кіл, що обмежують поверхні порожнини і тіла, які обчислюються за допомогою співвідношення

$$\theta^* = \arccos \left( \frac{(z^*)^2 + 2d(z^* + 1)}{2(d + z^*)} \right), \quad z^* = \int_0^t v_0(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

що було отримано у процесі розв'язання задачі.

В механічному плані сформульована задача є нестационарною змішаною крайовою задачею механіки для стисливої рідини з рухливою, наперед невідомою границею, що змінюється з часом.

В математичному плані ця задача являє собою неklasичний об'єкт математичної фізики, що не вписується в традиційні класифікації, для дослідження якого потрібні додаткові прийоми і підходи.

Слід зазначити, що сформульована задача містить елементи нелінійності, оскільки гідродинамічна сила, яка знаходиться в правій частині диференціального рівняння (1.6), має складну функціональну залежність від значення  $\theta^*$ , що визначає границі області контакту.

Зазначимо, що використання акустичного наближення для описання руху рідини накладає обмеження на величину швидкості занурення тіла  $v_0(t)$  – вона має бути малою у порівнянні зі швидкістю звуку в рідині. Так, за оцінкою школи В.Г. Баженова, при швидкостях до 200 м/с чисельні результати розв'язання задачі удару близькі до експериментальних.

**2. Математичне моделювання. Загальна постановка.** Розглянемо тепер осесиметричну змішану крайову задачу занурення твердої сфери в ідеальну стисливу рідину через поверхню сферичної порожнини. Постановка цієї задачі впливає із загальної постановки (1.1)-(1.9) 1-го розділу з урахуванням знесення граничних умов на недеформовану поверхню порожнини. Таким чином, її розв'язання зводиться до розв'язування змішаної крайової задачі.

Рух ідеальної стисливої рідини в акустичному наближенні щодо хвильового потенціалу  $\varphi$  описується в сферичних координатах хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

Гідродинамічний тиск і швидкість деформування поверхні порожнини визначаються за формулами:

$$p = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad V = \text{grad} \varphi. \quad (2.2)$$

Граничні умови представимо у вигляді:

- у межах області контакту задана умова непроникності поверхні тіла для рідини

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = v_0(t) \cos \theta, \quad \theta < \theta^*; \quad (2.3)$$

- на вільній поверхні порожнини тиск постійний і для спрощення приймаємо його рівним нулю

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{r=1} = 0, \quad \theta > \theta^*. \quad (2.4)$$

Збурення, викликані в рідині тілом, що занурюється, на нескінченності затухають

$$\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Оскільки до початку занурення рідина знаходилася в стані спокою, то будемо мати нульові початкові умови

$$\varphi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.6)$$

Закон руху тіла в порожнині визначається диференціальним рівнянням

$$\mu \frac{dv_0(t)}{dt} = -\frac{F(t)}{\pi}, \quad v_0(0) = v_0, \quad (2.7)$$

де гідродинамічна сила опору зануренню тіла з боку рідини  $F(t)$  обчислюється за формулою

$$F(t) = 2\pi \int_0^{\theta^*} p(t, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (2.8)$$

Границя області контакту  $\theta^*$  визначається, як точка перетину двох кіл, що обмежують поверхні тіла та порожнини, та обчислюється зі співвідношення

$$\theta^* = \arccos \left( \frac{(z^*)^2 + 2d(z^* + 1)}{2(d + z^*)} \right), \quad \text{де } z^* = \int_0^t v_0(\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Значимо, що для осесиметричного випадку вводилися наступні безрозмірні змінні:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{R_c}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R_c}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_c}, \quad \bar{t} = \frac{Ct}{R_c}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\gamma C^2}, \quad \bar{V} = \frac{V}{C}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\gamma \pi R_c^3}, \quad \bar{F} = \frac{F}{\gamma C^2 R_c^2},$$

де  $\rho, z$  – циліндричні координати,  $r, \rho$  – сферичні координати,  $R_c$  – характерний лінійний розмір (радіус порожнини),  $t$  – час,  $\gamma$  – густина рідини,  $p$  – гідродинамічний тиск,  $V$  – швидкість,  $F$  – гідродинамічна сила,  $C$  – швидкість звуку в рідині,  $\mu$  – маса кулі (віднесена до маси рідини, витисненої порожниною). Оскільки надалі будемо використовувати тільки безрозмірні змінні, то риску над ними опустимо.

Сформульовану постановку задачі (2.1), (2.3)-(2.9) надалі будемо називати загальною.

Дана постановка адекватно описує ранній етап занурення циліндру в стисливу рідину через поверхню циліндричної порожнини. На проміжку часу, поки акустична хвиля знаходиться в межах області контакту (поки швидкість розширення області контакту більша за швидкість звуку в рідині), вільна поверхня порожнини залишається недеформованою. На цьому проміжку часу дана модель адекватно описує фізику процесу. З виходом акустичної хвилі на вільну поверхню порожнини (швидкість розширення області контакту стає меншою за швидкість звуку в рідині) остання починає деформуватися. Відбувається підйом рідини поблизу тіла, що занурюється. Це призводить до збільшення площі області контакту, що впливає на величини основних характеристик процесу. Однак на початковому етапі підйом рідини буде незначним. Крім того, зі зменшенням значення зазору між порожниною та тілом вплив підйому рідини поблизу області контакту на гідродинамічні та кінематичні характеристики процесу суттєво зменшується. Таким чином, на розглянутому початковому етапі процесу підйомом рідини можна знехтувати.

Процес розв'язання докладно описаний в [3,4].

В результаті розв'язання задачі зводиться до сукупного розв'язування нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтера 2-го роду

$$p_n(t) = v_{0n}(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn} \int_0^t p_m(\tau) R_n(t-\tau) d\tau, \quad (2.10)$$

і диференціального рівняння

$$\mu \frac{dv_0(t)}{dt} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) b_n(\theta^*), \quad v_0(0) = v_0, \quad (2.11)$$

де ядро системи визначатиметься із рівняння

$$\int_0^t R_n(\tau) G_n(t-\tau) d\tau = g_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.12)$$

$$\text{де } G_n(t) = \frac{z_1^{\frac{n+1}{2}}(t) + z_2^{\frac{n+1}{2}}(t)}{2\sqrt{t(t+2)}}, \quad g_n(t) = \frac{z_1^{\frac{n+1}{2}}(t) + z_2^{\frac{n+1}{2}}(t)}{2\sqrt{t+2}} \sqrt{t},$$

а коефіцієнти визначаються зі співвідношень

$$v_{0n}(t) = \begin{cases} \frac{v_0(t)}{2} (1 - \eta^3), & n = 1; \\ -\frac{v_0(t)(2n+1)(1-\eta^2)}{2(1-n)(n+2)} (\eta P'_n(\eta) - P_n(\eta)), & n \neq 1, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\beta_{mn}(\theta^*) = \begin{cases} \frac{2n+1}{2} \int_{\eta}^1 (P_n(x))^2 dx, & n = m, \\ -\frac{(2n+1)(1-\eta^2)}{2(m-n)(m+n+1)} (P_m(\eta)P'_n(\eta) - P'_m(\eta)P_n(\eta)), & n \neq m, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$b_n(\theta^*) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} (1-\eta^3), & n=1; \\ \frac{2\pi(1-\eta^2)}{(n-1)(n+2)} (\eta P'_n(\eta) - P_n(\eta)), & n \neq 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

де  $\eta = \cos \theta^*$  а границя і області контакту  $\theta^*$  визначатимуться зі співвідношення (2.9).

**Постановка “Жорсткий екран”.** Паралельно розглянемо спрощену модель контакту тіла з поверхнею порожнини – постановка зі стисненою вільною поверхнею порожнини, яка відрізняється від загальної постановки граничною умовою на вільній поверхні порожнини.

Таким чином, для даної спрощеної постановки замість граничної умови (2.4) використовується умова недеформованості вільної поверхні порожнини

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \theta > \theta^*. \quad (2.16)$$

Значимо, що дана задача (2.1), (2.3), (2.12), (2.5)-(2.9) є незмішаною.

Модель зі стисненою вільною поверхнею порожнини також адекватно описує процес ударної взаємодії тіла з поверхнею порожнини на інтервалі часу, поки акустичні збурення не вийдуть за межі області контакту. З виходом збурень на вільну поверхню порожнини більш “жорсткі” умови на ній вносять певну похибку у значення гідродинамічних навантажень, але оскільки, як буде показано нижче, різниця в значеннях даних характеристик незначна, то цю спрощену методику можна рекомендувати для одержання інженерних оцінок розвитку процесу, що суттєво скоротить затрати комп’ютерного часу.

Процес розв’язання докладно описаний в [5].

На основі розвинутого підходу розв’язання цієї незмішаної крайової задачі зводиться до спільного розв’язку диференціального рівняння (2.11) та нескінченної послідовності лінійних інтегральних рівнянь Вольєрра другого роду (2.16) відносно коефіцієнтів розкладу тиску в ряд Фур’є за косинусами

$$p_n(t) = v_{0n}(t) - \int_0^t p_n(\tau) R_n(t-\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

де коефіцієнти визначатимуться із співвідношення (2.13), (2.15), з урахуванням співвідношення для обчислення границі області контакту (2.9), а ядро визначатиметься з рівняння (2.12).

Єдиний підхід до розв’язання задачі занурення в рідину циліндра, що знаходиться в циліндричній порожнині, в даних постановках дозволяє оцінити вплив на хід процесу різних граничних умов на вільній поверхні порожнини. Крім того, постановка зі стисненою вільною поверхнею порожнини полегшує виведення розв’язуючої системи задачі, що дозволяє суттєво спростити її чисельну реалізацію.

**Постановка з нульовим зазором.** Розглянемо також частинний випадок загальної постановки: припустимо, що радіус тіла так мало відрізняється від радіусу порожнини, що їх можна вважати рівними –  $R_c = R_b$ . Таким чином, величина зазору  $d$  між порожниною та тілом дорівнює нулю. В

цьому випадку полярний кут  $\theta^*$ , що визначає границю області контакту дорівнює  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ .

Слід зазначити, що сформульована задача (2.1), (2.3) – (2.8) є нестационарною змішаною крайовою задачею з відомою сталою границею.

Процес розв’язання докладно описаний в [3,4].

У випадку нульового зазору розв’язання задачі зводиться до сукупного розв’язування нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольєрра 2-го роду (2.11) і диференціального рівняння (2.10), де ядро системи визначатиметься із рівняння (2.12), а коефіцієнти визначаються зі співвідношень

$$v_{0n}(t) = \begin{cases} \frac{v_0(t)}{2}, & n=1; \\ -\frac{v_0(t)(2n+1)}{2(n-1)(n+2)} P_n(0), & n \neq 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\beta_{mn} = \begin{cases} \frac{2n+1}{2} \int_0^1 (P_n(x))^2 dx, & n=m, \\ \frac{2n+1}{2(n-m)(m+n+1)} (P_m(0)P'_n(0) - P_n(0)P'_m(0)), & n \neq m, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\text{де } P_n(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, & n=2k; \\ 0, & n=2k+1, \end{cases} \quad P'_n(0) = nP_{n-1}(0).$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}, & n=1; \\ -\frac{2\pi}{(n-1)(n+2)} P_n(0), & n \neq 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Слід зазначити, що дана постановка дозволяє отримати гідродинамічні та кінематичні характеристики співудару тіла з поверхнею порожнини для граничного, близького до нуля значення зазору. Крім того, у даному випадку підйому рідини поблизу області контакту не спостерігається, у зв'язку з цим можна констатувати, що дана постановка досить точно описує процес удару тіла по поверхні порожнини.

**3. Чисельна реалізація задачі.** Дослідження ударного процесу, що розглядається, в даній постановці зводиться до розв'язування нескінченної системи (послідовності) лінійних інтегральних рівнянь Вольтера 2-го роду (2.10 (2.17)) спільно з диференціальним рівнянням (2.11).

Розв'язування задачі здійснювалося чисельно на скінченному відрізку часу  $[0, T]$ , який розбивався на рівні частини кроком  $\Delta t$ , і в отриманих вузлах інтервалу часу обчислювалися всі шукані величини.

Нескінченна система (послідовність) інтегральних рівнянь і права частина диференціального рівняння піддавалися усіканню. Обґрунтування такого усікання зроблено, зокрема, в [2]. Порядок усікання  $N$  вибирався з міркувань практичної збіжності розв'язку. В системі (послідовності) всі інтеграли обчислювалися за квадратурною формулою лівих прямокутників. У результаті дана система зводилася до системи алгебраїчних рівнянь. Диференціальне рівняння замінювалося різницевим. Для поліпшення збіжності рядів Фур'є застосовувалися  $\sigma$ -множники Гібса [5]. На основі аналізу отриманих окремих результатів можна зробити наступні висновки:

1. Модель ідеальної стисливої рідини на ранньому етапі дає змогу отримати більш адекватні фізиці явища результати, порівняно з моделлю ідеальної нестисливої рідини.

- значення гідродинамічної сили для випадку нестисливої рідини (крива 2) в початковий момент часу має необґрунтований скінчений стрибок, натомість гідродинамічна сила отримана за допомогою стисливої рідини, у той самий момент часу дорівнює нулю;

- на більш пізніх етапах обидві моделі дозволяють одержувати близькі за значенням результати.

Слід зазначити, що гідродинамічна сила за нульового зазору для випадку нестисливої рідини дорівнюватиме нулю.

2. Стисненість вільної поверхні порожнини вносить певну похибку в розв'язок задач.

Проведене порівняння результатів показало, що більш "жорсткі" умови на вільній поверхні порожнини дещо завищують значення гідродинамічних навантажень (рис. 2 – гідродинамічний тиск, рис. 3 – гідродинамічна сила; криві, позначені на рисунках суцільною лінією та пунктиром відповідатимуть загальній та спрощеній постановкам). Але, оскільки ця різниця в значеннях характеристик незначна, то дану спрощену методику можна рекомендувати для отримання інженерних оцінок розвитку процесу, що дозволяє суттєво скоротити затрати комп'ютерного часу (на один порядок і більше).

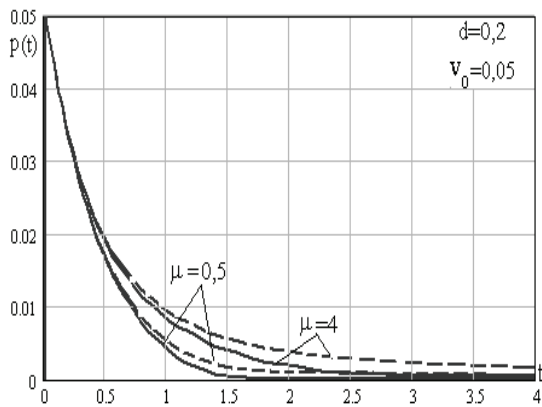


Рисунок 2 – Вплив стисненості вільної поверхні каверни на гідродинамічний тиск

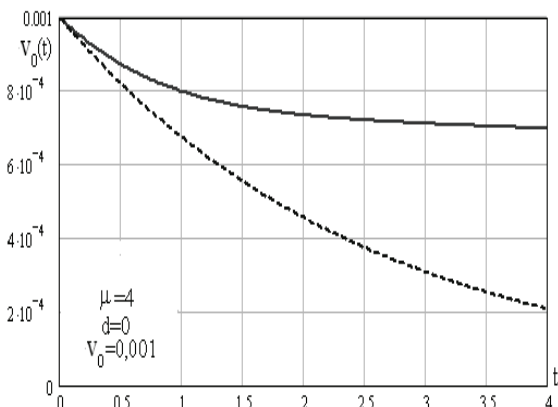


Рисунок 4 – Порівняння чисельних та асимптотичних результатів, отриманих для швидкості руху сферичного тіла  $v_0(t)$  за нульового зазору

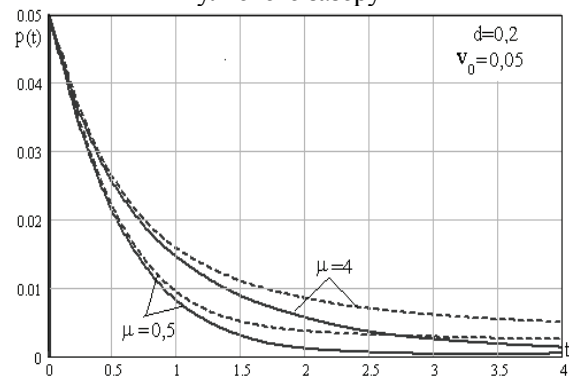


Рисунок 6 – Порівняння результатів, що були отримані щодо гідродинамічних характеристик для спрощеної постановки з “жорсткими” умовами на вільній поверхні порожнини та загальної постановки

3. Отримані результати можуть бути критерієм достовірності для наближених розв’язків задач ударної взаємодії тіла з поверхнею порожнини.

На рис. 4 наведено порівняння чисельних та асимптотичних результатів, отриманих для швидкості руху циліндричного тіла  $v_0(t)$  за нульового зазору [3]. Криві, позначені на рисунках суцільною лінією та пунктиром відповідатимуть чисельним та асимптотичним результатам.

Із рис. 4 видно, що результати, отримані аналітично за допомогою асимптотичних представлень модифікованих функцій Бесселя, дещо занижені для кінематичних навантажень у порівнянні з аналогічними чисельними результатами, але оскільки ця різниця в значеннях даних характеристик не

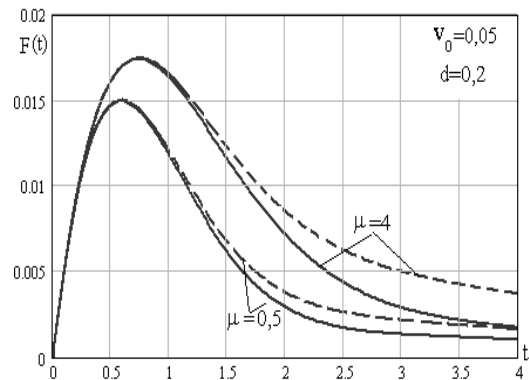


Рисунок 3 – Вплив стисненості вільної поверхні порожнини на гідродинамічну силу

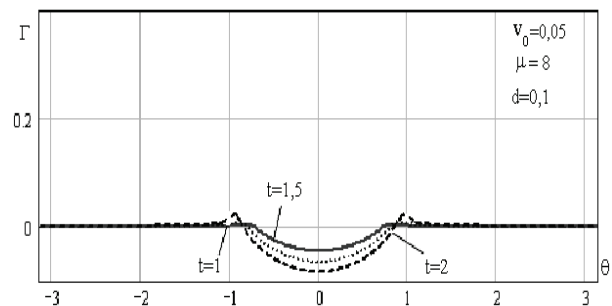


Рисунок 5 – Зображення поверхні порожнини в процесі взаємодії з кулею

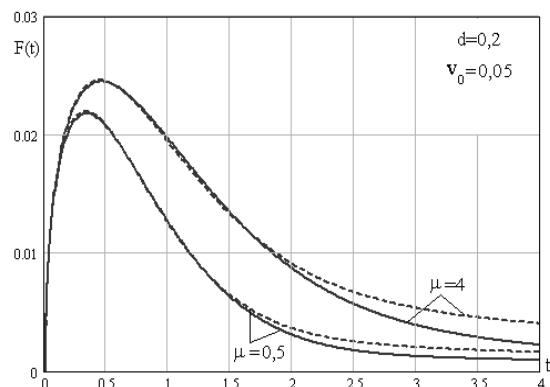


Рисунок 7 – Порівняння результатів, що були отримані щодо гідродинамічних характеристик для спрощеної постановки з “жорсткими” умовами на вільній поверхні порожнини та загальної постановки

надто значна, то із урахуванням запасу міцності конструкцій, на ранньому етапі наближені асимптотичні розв'язки можна рекомендувати для інженерних оцінок розвитку процесу.

На рис. 5 зображено поверхню порожнини в процесі взаємодії з кулею (розміщену на площині) в різні моменти часу  $t = 1; 1,5; 2$  при наступних значеннях параметрів:  $d = 0,1$ ;  $v_0 = 0,05$ ;  $\mu = 8$ .

На рис. 5 можна помітити, що

- на границі області контакту спостерігається підйом рідини поблизу сфери, що занурюється, причому з часом цей підйом зростає, але оскільки на розглянутому проміжку часу він є малим, ми маємо змогу знехтувати ним.

- оскільки ми розглядаємо безвідривний контакт тіла з поверхнею порожнини, то деформована поверхня порожнини матиме форму тіла.

Нагадаємо, що у випадку нульового зазору підйому рідини поблизу області контакту не спостерігається.

На рис. 6-7 наведено порівняння результатів, що були отримані для гідродинамічних характеристик для спрощеної постановки з "жорсткими" умовами на вільній поверхні порожнини та загальної постановки, розглянутої в [4]. Криві, позначені на малюнку суцільною лінією та пунктиром відповідатимуть загальній постановці та моделі зі стисненою вільною поверхнею порожнини.

Із рис. 6-7 видно, що більш "жорсткі" умови на вільній поверхні порожнини завищують значення гідродинамічних навантажень, але оскільки ця різниця в значеннях характеристик незначна, то для одержання інженерних оцінок розвитку процесу можна рекомендувати дану спрощену методику, що суттєво скоротить затрати комп'ютерного часу.

Висновки. У роботі одержано розв'язок осесиметричної задачі занурення твердого сферичного тіла в ідеальну стисливу рідину крізь поверхню сферичної порожнини. Обчислено гідродинамічні і кінематичні характеристики досліджуваного процесу. Задача розв'язана на інтервалі часу, на якому гідродинамічні характеристики встигають досягти своїх максимальних значень. Використання моделі стислої рідини дозволило отримати більш адекватні фізиці явища результати. Проведено оцінку ступеня впливу на шукані характеристики різних граничних умов на вільній поверхні порожнини для нульового зазору.

#### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баженов В.Г. Анализ нелинейных эффектов при проникании тел в сжимаемую жидкость / Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. // Прикладная механика, 1986, 22, № 2. – С.125-127.
2. Коробейник Ю.Ф. О сходимости метода редукции при решении счетных систем линейных интегральных уравнений // Уч. зап. Рост. н./Д. ун-та., 1956, Т. 43, № 6. – С.21-57.
3. Кубенко В.Д. Нестационарные поперечные движения короткого тупого тела при суперкавитационном обтекании / Кубенко В.Д. // Докл. НАНУ, 2003, № 7. – С.46-53.
4. Кубенко В.Д. Осесимметрическая задача про удар твердого сферического тела по поверхности каверны в сжимаемой жидкости / Кубенко В.Д., Гавриленко Е.В. // Прикладная механика, 2008, 44, № 1. – С.11-19.
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. // – М: Физматгиз, 1961. – 542 с.
6. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. // – К.: Наук. думка, 1969. – 215 с.
7. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глассирования // Тр. ЦАГИ. 1980, Вып. 2052. – С.3-12.
8. Морс Ф. Методы теоретической физики. / Морс Ф., Фешбах Г. // В 2-х т., Т.1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 960 с.

#### REFERENCES

1. Bazhenov V.G. Analysis of nonlinear effects in the penetration of bodies in compressible fluid. / V.G. Bazhenov, A.V. Kochetkov, S.V. Krylov // Applied Mechanics, 1986, 22, № 2, p.125-127. (Rus)
2. Korobeinik J.F. The convergence of the reduction method for solving counting systems of linear integral equations // The scientists note of Rostov-on-Don University, 1956, Vol. 43, № 6, p.21-57. (Rus)
3. V.D. Kubenko Transverse unsteady motion of short blunt body at supercavitation flow / Kubenko V.D. // Rep. NASU, 2003, № 7, pp 46-53.
4. V.D. Kubenko Oxysymmetrical problem about shock of solid spherical body on the surface of the cavity in a compressible liquid / Kubenko V.D., Gavrylenko E.V. // Journal of Applied Mechanics, 2008, 44, № 1, pp 11-19.
5. Lanczos K. Practical Methods of Applied Analysis. // М: Fizmatgiz, 1961, 542 p. (Rus)
6. Logvinovich G.V. Hydrodynamics of flows with free boundaries. // К: Naukova Dumka, 1969, 215 p. (Rus)



7. Logvinovich GV Some questions of slipping // Trudy TsAGI. 1980, Vol. 2052, p.3-12. (Rus)
8. F. Morse, Methods of Theoretical Physics. / F. Morse, H. Feshbach // In 2 Vols – Vol.1, M: Foreign Literature Publishing House. 1958., p.960. (Rus).

#### РЕФЕРАТ

Гавриленко О.В. Математичне моделювання удару твердого сферичного тіла по поверхні порожнини у стисливій рідині / О.В. Гавриленко // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник. – К. : НТУ, 2015. – Вип. 1 (31).

Робота присвячена розвитку загального підходу до розв'язання задач ударної взаємодії твердих тіл з поверхнею порожнини, які належать до нестационарних змішаних (незмішаних) крайових задач механіки для стислої рідини з рухливою, наперед невідомою границею, що змінюється за часом.

Об'єкт дослідження являє собою тверді тіла сферичної форми, що вступають в контакт з порожниною в ідеальній стисливій рідині.

Мета роботи – дослідження залежностей гідродинамічних і кінематичних характеристик процесу від маси тіла, початкової швидкості занурення тіла та величини зазору між порожниною і тілом, також проведення оцінки ступеня впливу на шукані характеристики різних граничних умов на вільній поверхні порожнини для нульового зазору. Також метою роботи було підтвердження обрання моделі стислої рідини, як такої, що більш адекватно описує фізику процесу.

Метод дослідження – чисельно-аналітичний підхід, запропонований В.Д. Кубенком.

На основі даного підходу розв'язано нові практично важливі задачі занурення твердих тіл в рідину через поверхню порожнини. При розв'язанні задачі за допомогою методів інтегральних перетворень Лапласа, розподілу змінних, теореми про згортку оригіналів двох функцій, а також розкладів шуканих характеристик в ряди Фур'є отримано нескінченну систему або послідовність лінійних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду відносно коефіцієнтів гідродинамічного тиску та диференціальне рівняння.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** СТИСЛИВА РІДИНА, ТВЕРДЕ ТІЛО, РАДІУС ПОРОЖНИНИ, РАДІУС ТІЛА, ЗАЗОР МІЖ ПОРОЖНИНОЮ ТА ТІЛОМ, ОБЛАСТЬ КОНТАКТУ, ВІЛЬНА ПОВЕРХНЯ ПОРОЖНИНИ, ГІДРОДИНАМІЧНІ І КІНЕМАТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.

#### ABSTRACT

Gavrilenko O.V. Mathematical modelling of solid shock spherical body on the surface cavity in a compressible fluid. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2015. – Issue 1 (31).

The work deals with the development of general approach to the solution of the problems of impact of hard bodies on a surface of cavity, which belong to un-steady mixed and unmixed boundary problems of mechanics with compressible fluid with movable beforehand unknown variable boundary that changes with time.

Research object is a spherical solids that come in contact with the cavity in an ideal compressible fluid.

Purpose – to study the dependences of the hydrodynamic and kinematic characteristics of the process of body weight, body immersion initial velocity and size of the gap between the body cavity and also assess the degree of impact on the desired characteristics of different boundary conditions on the free surface of the cavity for zero backlash. Also, the aim of study was to confirm the election of a compressible fluid model as one that more adequately describes the physics of the process.

Research methods – numerical-analytical approach proposed by V.D. Kubenko.

Based on this approach, the decision of new practically important problem of immersion of solids in a liquid through the surface of the cavity. While solving the problem using the methods of integral transforms Laplace distribution of variables theorem about convolution of two functions originals and schedules desired characteristics in the Fourier series, the infinite system or a sequence of linear integral equations of the second kind with respect to Voltaire coefficient of hydrodynamic pressure and the differential equation.

**KEY WORDS:** COMPRESSIBLE FLUID, RIGID BODY, THE RADIUS OF CAVITY, THE RADIUS OF A BODY, THE GAP BETWEEN A CAVITY AND A BODY, THE FIELD OF CONTACT, FREE CAVITY SURFACE, HYDRODYNAMIC AND KINEMATICAL CHARACTERISTICS.

## РЕФЕРАТ

Гавриленко Е.В. Математическое моделирование удара твердого сферического тела по поверхности полости в сжимаемой жидкости / Е.В. Гавриленко // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К. : НТУ, 2015. – Вып. 1 (31).

Работа посвящена развитию общего подхода к решению задач ударного взаимодействия твердых тел с поверхностью полости, относящиеся к нестационарным смешанным (несмешанным) краевым задач механики для сжимаемой жидкости с подвижной, заранее неизвестной границей изменяющейся по времени.

Объект исследования представляет собой твердые тела сферической формы, вступают в контакт с полостью в идеальной сжимаемой жидкости.

Цель работы – исследование зависимостей гидродинамических и кинематических характеристик процесса от массы тела, начальной скорости погружения тела и величины зазора между полостью и телом, также проведение оценки степени влияния на искомые характеристики различных граничных условий на свободной поверхности полости для нулевого зазора. Также целью работы было подтверждение избрания модели сжимаемой жидкости, как таковой, что более адекватно описывает физику процесса.

Метод исследования – численно-аналитический подход, предложенный В.Д. Кубенко.

На основе данного подхода решены новые практически важные задачи погружения твердых тел в жидкость через поверхность полости. При решении задачи с помощью методов интегральных преобразований Лапласа, разделения переменных, теоремы о свертке оригиналов двух функций, а также расписаний искомым характеристикам в ряды Фурье получена бесконечная система или последовательность линейных интегральных уравнений Вольтера второго рода относительно коэффициентов гидродинамического давления и дифференциальное уравнение.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ, ТВЕРДОЕ ТЕЛО, РАДИУС ПОЛОСТИ, РАДИУС ТЕЛА, ЗАЗОР МЕЖДУ ПОЛОСТЬЮ И ТЕЛОМ, ОБЛАСТЬ КОНТАКТА, СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПОЛОСТИ, ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.

### АВТОР:

Гавриленко Олена Валеріївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри АСОІУ, ФІОТ, НТУУ «КПІ», e-mail: iem.gavrilenko@meta.ua, +38095768058, Україна, Київ, вул. Політехнічна, 41, 18 корпус, к. 430.

### AUTHOR:

Gavrilenko Olena, Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor of Department AIPSM, FICT, e-mail: iem.gavrilenko@meta.ua, +38095768058, Ukraine, Kyiv, Polytehnicheskaya st., 41, 18 buld., r. 430.

### АВТОР:

Гавриленко Елена Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры АСОИУ, ФИОТ, НТУУ «КПИ», e-mail: iem.gavrilenko@meta.ua, +38095768058, Украина, Киев, ул. Политехническая, 41, 18 корпус, к. 430.

### РЕЦЕНЗЕНТИ:

Баранов Г.Л., професор кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету, доктор технічних наук, професор,

Безверхий О.І., завідувач відділу електропружності Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

### REVIEWER:

Baranov G.L., Professor of Information Systems and Technology National Transport University, Doctor of Engineering, Professor,

Bezverkhyi O.I., head of department electroelasticity of the Institute of Mechanics S.P. Tymoshenko National Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.