

УДК 539.3
UDC 539.3

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ВОЛОКНИСТИХ ПОРОЖНИСТИХ ВАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАЦІЇ ЕНЕРГІЇ

Марчук О.В., доктор технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна
Гнедаш С.В., Національний транспортний університет, Київ, Україна
Левківський С.А., Національний транспортний університет, Київ, Україна

NUMERICAL AND ANALYTICAL MODEL OF CALCULATION OF FIBER HOLLOW SHAFTS FORCED VIBRATIONS TAKING INTO ACCOUNT THE ENERGY DISSIPATION

Marchuck O.V., Eng.D., National Transport University, Kyiv, Ukraine
Gnedash S.V., National Transport University, Kyiv, Ukraine
Levkivskiy S.A., National Transport University, Kyiv, Ukraine

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВОЛОКНИСТЫХ ПОЛЫХ ВАЛОВ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

Марчук А.В., доктор технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Гнедаш С.В., Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Левковский С.А., Национальный транспортный университет, Киев, Украина

Вступ

Нині все більшого застосування в різних галузях техніки набувають пластикові волокнисті порожнисті вали. Шари таких конструкцій володіють анізотропією властивостей. Вони схильні до динамічних, близьких до резонансних навантажень, що призводять до тривимірного напружено-деформованого стану з високими градієнтами його зміни. Це обумовлює необхідність розвитку відповідних підходів до розрахунку подібного роду конструкцій. Розрахунку вільних коливань в тривимірній постановці присвячено досить велику кількість робіт, огляд яких можна знайти в [1-2,4-12,16-27]. Вільні та вимушені коливання товстостінних оболонок з урахуванням дисипації енергії на частотах близьких до резонансних практично не розглядалися.

Завданням даної роботи є розробка підходу, який дозволяє розглядати вимушені коливання товстостінних оболонок в умовах осесиметричного згину з урахуванням дисипації енергії.

1. Побудова рішення

Рівняння динамічної рівноваги k -того анізотропного шару оболонки в змішаній формі мають вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} - B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t) - B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)}(x,r,t) = 0; \\ B_{13}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + \frac{\partial U_r^{(k)}(x,r,t)}{\partial r} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)}(x,r,t) + B_{63}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} - B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) &= 0; \\ & \frac{\partial U_r^{(k)}(x,r,t)}{\partial r} - \frac{1}{r} U_r^{(k)}(x,r,t) - B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t) - B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)}(x,r,t) = 0; \\ B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x^2} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}(x,r,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t)}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t) + B_{13}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial t^2} - 2\rho\eta \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial t} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{21}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r^2} U_r^{(k)}(x,r,t) + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t)}{\partial r} + \\
 & + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) - \rho \frac{\partial^2 U_r^{(k)}(x,r,t)}{\partial t^2} - 2\rho\eta \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial t} = 0; \\
 & B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x^2} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}(x,r,t)}{\partial x^2} + B_{36}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}(x,r,t)}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)}(x,r,t) - \rho \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}(x,r,t)}{\partial t^2} - 2\rho\eta \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial t} = 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

де зміст жорсткісних характеристик $B_{ij}^{(k)}$ розкривається в наступному взаємозв'язку напружень та деформацій:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{(k)}(x,r,t) &= B_{11}^{(k)} e_{xx}^{(k)}(x,r,t) + B_{12}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)}(x,r,t) + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) + B_{16}^{(k)} 2 e_{x\theta}^{(k)}(x,r,t); \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(k)}(x,r,t) &= B_{21}^{(k)} e_{xx}^{(k)}(x,r,t) + B_{22}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)}(x,r,t) + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) + B_{26}^{(k)} 2 e_{x\theta}^{(k)}(x,r,t); \\
 \sigma_{x\theta}^{(k)}(x,r,t) &= B_{61}^{(k)} e_{xx}^{(k)}(x,r,t) + B_{62}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)}(x,r,t) + B_{63}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) + B_{66}^{(k)} 2 e_{x\theta}^{(k)}(x,r,t); \\
 B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) &= B_{13}^{(k)} e_{xx}^{(k)}(x,r,t) + B_{23}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)}(x,r,t) + e_{rr}^{(k)}(x,r,t) + B_{36}^{(k)} 2 e_{x\theta}^{(k)}(x,r,t); \\
 e_{r\theta}^{(k)}(x,r,t) &= B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)}(x,r,t) + B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t); \\
 e_{xr}^{(k)}(x,r,t) &= B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)}(x,r,t) + B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t).
 \end{aligned}$$

Поздовжні та колові напруження знаходяться із закону Гука:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{(k)}(x,r,t) &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)}(x,r,t) + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) + B_{16}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}(x,r,t)}{\partial x}; \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(k)}(x,r,t) &= B_{21}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}(x,r,t)}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)}(x,r,t) + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) + B_{26}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}(x,r,t)}{\partial x}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

У випадку вільних та вимушених коливань при шарнірному закріпленні, шукані функції представляються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 U_x^{(k)}(x,r,t) &= V_1(x) f_1^{(k)}(r) s(t); \quad U_\theta^{(k)}(x,r,t) = V_2(x) f_2^{(k)}(r) s(t); \\
 U_r^{(k)}(x,r,t) &= V_3(x) f_3^{(k)}(r) s(t); \quad \sigma_{xr}^{(k)}(x,r,t) = \tau_{13}(x) f_4^{(k)}(r) s(t); \\
 \sigma_{\theta r}^{(k)}(x,r,t) &= \tau_{23}(x) f_5^{(k)}(r) s(t); \quad \sigma_{rr}^{(k)}(x,r,t) = \tau_{33}(x) f_6^{(k)}(r) s(t), \quad (3)
 \end{aligned}$$

де розподіл функцій в плані конструкції приймається у вигляді:

$$V_1(x) = \tau_{13}(x) = \cos \frac{\pi n x}{l}; \quad V_2(x) = \tau_{23}(x) = \cos \frac{\pi n x}{l}; \quad V_3(x) = \tau_{33}(x) = \sin \frac{\pi n x}{l},$$

що призводить до виконання граничних умов на контурі конструкції. Функція зміни за часом розшукується стандартним чином: $s(t) = e^{i\omega t}$. При цьому рівняння рівноваги в гармонійних коливаннях набувають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{df_1^{(k)}(r)}{dr} &= -f_3^{(k)}(r) \left(\frac{\pi n}{a} \right) + f_4^{(k)}(r) B_{55}^{(k)} + f_6^{(k)}(r) B_{54}^{(k)}; \\
 \frac{df_3^{(k)}(r)}{dr} &= f_1^{(k)}(r) B_{13}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) - f_3^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} + f_2^{(k)}(r) B_{36}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + f_6^{(k)}(r) B_{33}^{(k)}; \\
 \frac{df_2^{(k)}(r)}{dr} &= -f_2^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} + f_4^{(k)}(r) B_{45}^{(k)} + f_6^{(k)}(r) B_{44}^{(k)}; \\
 \frac{df_4^{(k)}(r)}{dr} &= f_1^{(k)}(r) (B_{11}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \rho \omega^2 - 2i\rho\eta\omega) - f_3^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \\
 &\quad + f_2^{(k)}(r) B_{16}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - f_4^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} - f_6^{(k)}(r) B_{13}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right); \\
 \frac{df_6^{(k)}(r)}{dr} &= -f_1^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + f_3^{(k)}(r) \left(\frac{1}{r^{(k)2}} B_{22}^{(k)} - \rho \omega^2 - 2i\rho\eta\omega \right) - \\
 &\quad - f_2^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + f_4^{(k)}(r) \left(\frac{\pi n}{a} \right) + f_6^{(k)}(r) \left(\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} - \frac{1}{r^{(k)}} \right); \\
 \frac{df_5^{(k)}(r)}{dr} &= f_1^{(k)}(r) B_{16}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - f_3^{(k)}(r) \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + f_2^{(k)}(r) (B_{66}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \\
 &\quad - \rho \omega^2 - 2i\rho\eta\omega) - f_6^{(k)}(r) B_{36}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) - f_5^{(k)}(r) \frac{2}{r^{(k)}}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Представляючи рішення системи (4) в наступному вигляді:

$$f_j(r) = \mu_j e^{\beta r}; \quad (j = 1, 3, 2, 4, 5, 6), \tag{5}$$

приходять до системи однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \beta \mu_1^{(k)} &= -\mu_3^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \mu_4^{(k)} B_{55}^{(k)} + \mu_6^{(k)} B_{54}^{(k)}; \\
 \beta \mu_3^{(k)} &= \mu_1^{(k)} B_{13}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) - \mu_3^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} + \mu_2^{(k)} B_{36}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \mu_6^{(k)} B_{33}^{(k)}; \\
 \beta \mu_2^{(k)} &= -\mu_2^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + \mu_4^{(k)} B_{45}^{(k)} + \mu_6^{(k)} B_{44}^{(k)}; \\
 \beta \mu_4^{(k)} &= \mu_1^{(k)} (B_{11}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \rho \omega^2 - 2i\rho\eta\omega) - \mu_3^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \\
 &\quad + \mu_2^{(k)} B_{16}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \mu_4^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} - \mu_6^{(k)} B_{13}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right); \\
 \beta \mu_6^{(k)} &= -\mu_1^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \mu_3^{(k)} \left(\frac{1}{r^{(k)2}} B_{22}^{(k)} - \rho \omega^2 - 2i\rho\eta\omega \right) - \\
 &\quad - \mu_2^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \mu_4^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \mu_6^{(k)} \left(\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} - \frac{1}{r^{(k)}} \right); \\
 \beta \mu_5^{(k)} &= \mu_1^{(k)} B_{16}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \mu_3^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) + \mu_2^{(k)} (B_{66}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \\
 &\quad - \rho \omega^2 - 2i\rho\eta\omega) - \mu_6^{(k)} B_{36}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{a} \right) - \mu_5^{(k)} \frac{2}{r^{(k)}}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

У загальному випадку корені можуть бути дійсними і комплексними, що дозволяє записати

$$f_j^{(k)}(r) = \mu_{j1}^{(k)} C_1^{(k)} e^{\beta_1^{(k)} r} + \mu_{j3}^{(k)} C_3^{(k)} e^{\beta_3^{(k)} r} + \mu_{j2}^{(k)} C_2^{(k)} e^{\beta_2^{(k)} r} + \\ + \mu_{j4}^{(k)} C_4^{(k)} e^{\beta_4^{(k)} r} + \mu_{j6}^{(k)} C_6^{(k)} e^{\beta_6^{(k)} r} + \mu_{j5}^{(k)} C_5^{(k)} e^{\beta_5^{(k)} r}, \quad (j=1,3,2,4,5,6). \quad (7)$$

Розв'язна система рівнянь щодо постійних інтегрування $C_j^{(k)}$ формується за рахунок задоволення умов сполучення складових оболонок і умов на поверхні вихідної оболонки, що призводить до розв'язної системи рівнянь порядку $6N$ (N – це кількість складових оболонок). Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, отримується можливість знайти власні частоти вільних коливань ($\omega_0^2 = \omega^2 - 2i\eta\omega$). Нескладні алгебраїчні перетворення дозволяють зробити висновок, що за годинною координатою шукані величини в вільних згасаючих коливаннях змінюються згідно із законом $s(t) = e^{-\eta t} \cos((\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2})t)$, що повністю збігається з відомою формулою курсу опору матеріалів для згасаючих коливань системи з одним ступенем свободи. У разі усталених вимушених гармонійних коливань цей закон має вигляд: $s(t) = (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) / 2$. В цьому випадку шукані величини записуються наступним чином:

$$U_x^{(k)}(x, r, t) = \cos \frac{\pi m x}{l} \left| f_1^{(k)}(r) \right| \cos(\Omega t + \arg(f_1^{(k)}(r))); \\ U_\theta^{(k)}(x, r, t) = \cos \frac{\pi m x}{l} \left| f_2^{(k)}(r) \right| \cos(\Omega t + \arg(f_2^{(k)}(r))); \\ U_r^{(k)}(x, r, t) = \sin \frac{\pi m x}{l} \left| f_3^{(k)}(r) \right| \cos(\Omega t + \arg(f_3^{(k)}(r))); \\ \sigma_{x'}^{(k)}(x, r, t) = \cos \frac{\pi m x}{l} \left| f_4^{(k)}(r) \right| \cos(\Omega t + \arg(f_4^{(k)}(r))); \\ \sigma_{\theta'}^{(k)}(x, r, t) = \cos \frac{\pi m x}{l} \left| f_5^{(k)}(r) \right| \cos(\Omega t + \arg(f_5^{(k)}(r))); \\ \sigma_{r'r}^{(k)}(x, r, t) = \sin \frac{\pi m x}{l} \left| f_6^{(k)}(r) \right| \cos(\Omega t + \arg(f_6^{(k)}(r))).$$

2. Результати чисельних досліджень

Як приклад розглядається циліндрична оболонка з шістнадцятьма композитними шарами, які повернуті на 0° ; 45° ; -45° ; 90° ; 0° ; 45° ; -45° ; 90° ; 0° ; 45° ; -45° ; 90° ; 0° ; 45° ; -45° ; 90° з наступними фізико-механічними характеристиками: $E_1^{(1)} / E_\theta^{(1)} = 25/1$; $G_{1\theta}^{(1)} / E_\theta^{(1)} = 0,5/1$; $E_\theta^{(1)} = E_r^{(1)}$; $G_{1r}^{(1)} = G_{1\theta}^{(1)}$; $G_{\theta'}^{(1)} / E_\theta^{(1)} = 0,2/1$; $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)} = 0,25$; $l/h = 10$. Товщини шарів однакові. Опора на контурі шарнірно-рухома. Співвідношення $h/R = 1/10$. Оболонка анізотропна, поздовжні та згинальні коливання також пов'язані з крутильними.

На рис. 1 представлені форми власних коливань для четвертої частини оболонки при $h/R = 1/10$. Перша форма є переважно згинальною $\bar{\omega}_0^2 = 9,6866e - 002$.

В лівій колонці рис. 1 наведені переміщення U_r , які відкладаються вертикально і переміщення U_x , які відкладаються горизонтально; в правій колонці наведені переміщення U_θ , які відкладаються вертикально.

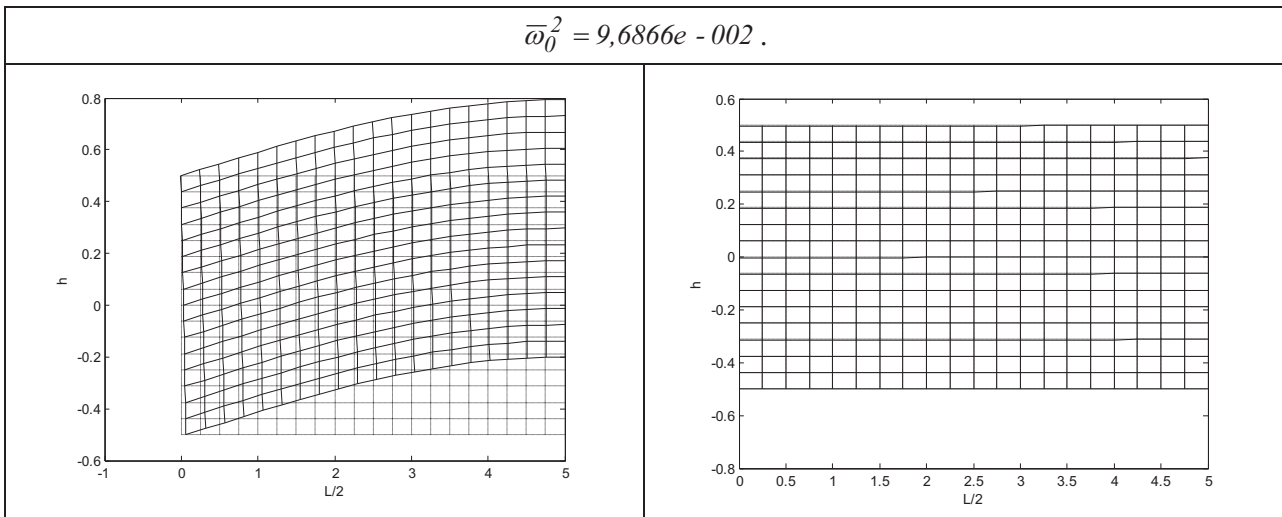


Рисунок 1 – Форми вільних коливань композитної оболонки тестового прикладу

На рис. 2 представлені форми коливань валу при крутильних навантаженнях $q_\theta = \bar{q}_\theta \cos \frac{\pi m x}{l} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) / 2$ без дисипації енергії. На рис. 3 представлені форми коливань валу при крутильних навантаженнях із дисипацією енергії ($\eta = \Omega \cdot k_\eta / 2$).

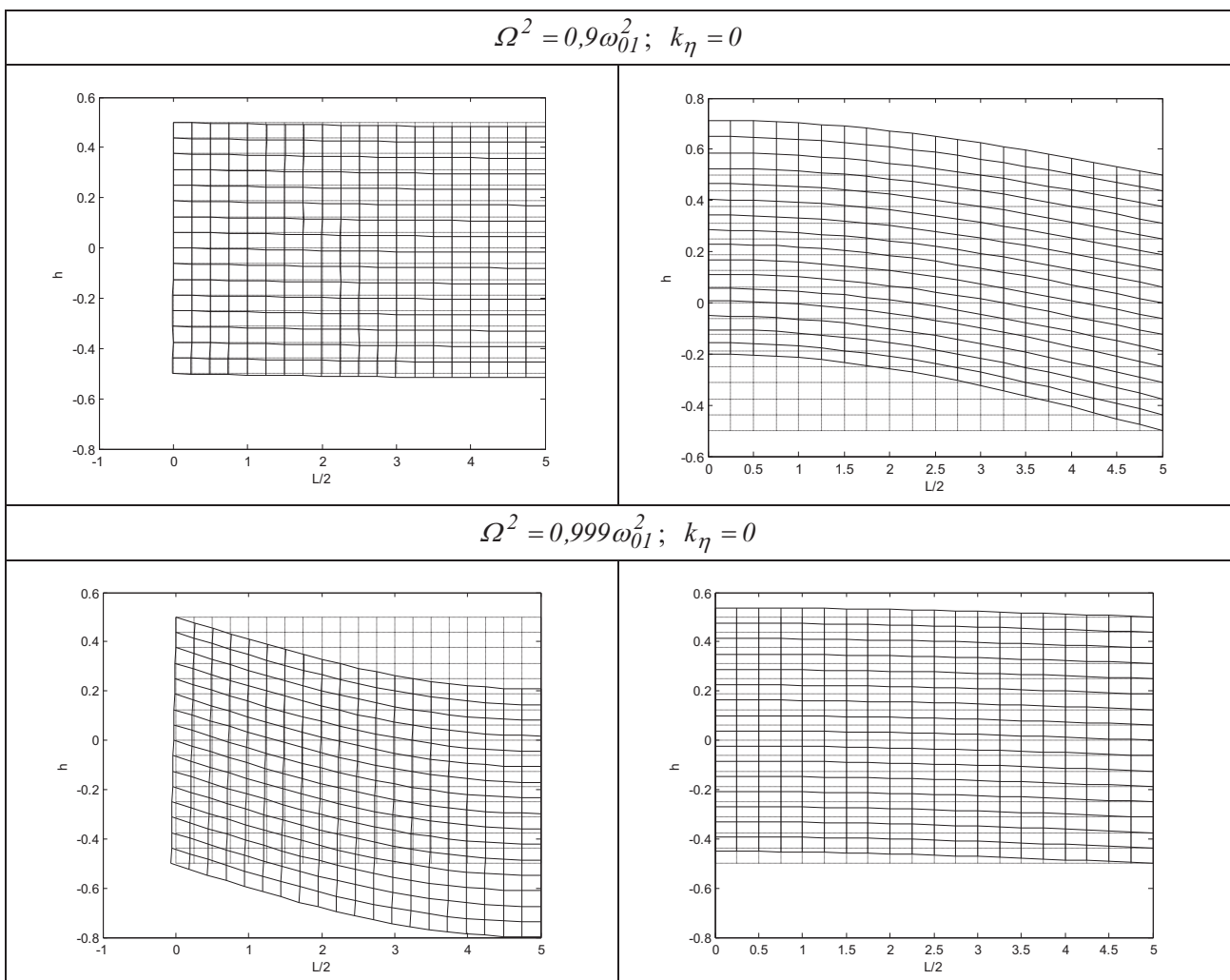


Рисунок 2 – Форми вимушених коливань композитної оболонки без дисипації енергії

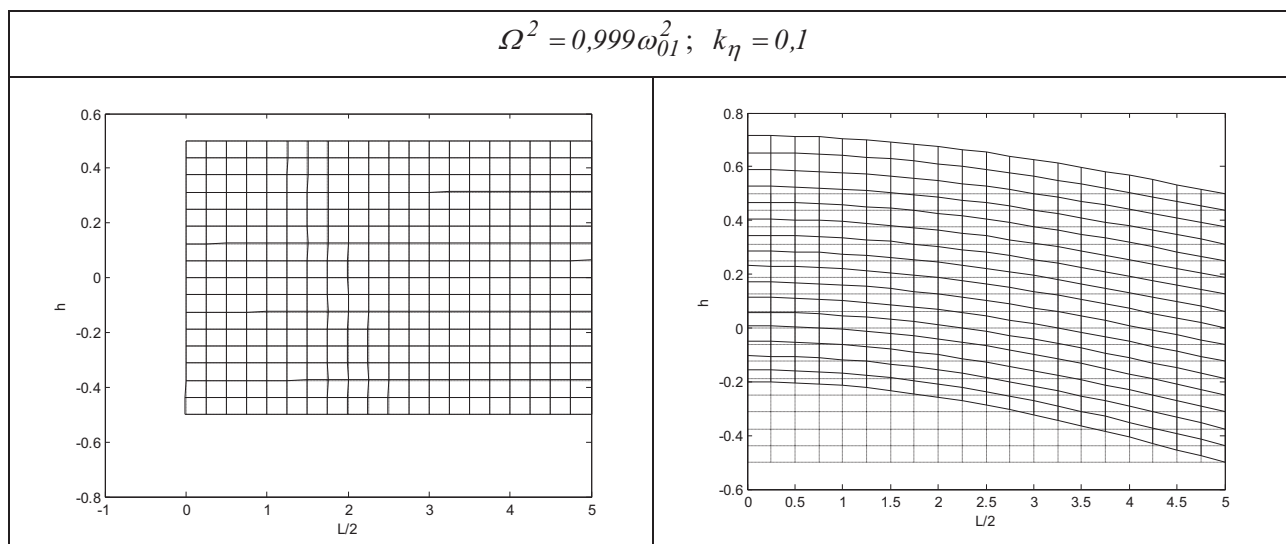


Рисунок 3 – Форми вимушених коливань композитної оболонки із дисипацією енергії

Як видно з рисунків 2 і 3, при крутильних навантаженнях вал залучається до згинального резонансу тільки при $\Omega^2 = 0,999\omega_{01}^2; k_\eta = 0$. Найменше відхилення від згинальної резонансної частоти ($\Omega^2 = 0,9\omega_{01}^2; k_\eta = 0$) призводить до того, що вал її не помічає і робить крутильні гармонійний коливання, які відповідають крутильному навантаженню. До такого ж ефекту призводить наявність незначної дисипації $\Omega^2 = 0,999\omega_{01}^2; k_\eta = 0,1$ (Рис. 3).

Висновки

Розроблений чисельно-аналітичний підхід до дослідження вимушених коливань волокнистих валів з урахуванням дисипації енергії. Проведені дослідження показали, що при крутильних навантаженнях вал залучається до згинального резонансу тільки при практичному збіганні частоти вимушених коливань з частотою вільних згинальних коливань. Невелике відхилення від резонансної частоти призводить до того, що будь-яких проявів резонансу не спостерігається. До такого ж ефекту призводить наявність дисипації.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций.– К.: Наукова думка, 1986.–172 с.
2. Марчук А.В., Пискунов В.Г. Разработка математических моделей вынужденных колебаний слоистых конструкций в трехмерной постановке с учетом диссипации энергии // Механика композиционных материалов и конструкций.– 1999.– 5,№3.– С. 119-130.
3. Марчук А.В. Исследование вынужденных колебаний слоистых цилиндрических оболочек полуаналитическим методом конечных элементов. // Механика композиционных материалов и конструкций.– 2013.– 19,№2.– С. 223-232.
4. Altay Gulai, Dokmeci Cengiz M. A polar theory for vibrations of thin elastic shells //Int. J. Solids Struct.– 2006.– 43, N.9.– P. 2578–2601.
5. Amabili M. Effect of boundary conditions on nonlinear vibrations of circular cylindrical panels. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2007.–74, N4.– P. 645–657.
6. Callanhan, J. and Baruh, H. A Closed-Form Solution Procedure for Circular Cylindrical Shell Vibrations. //International Journal of Solids and Structures.– 1999. –36, N20.– P. 2973–3013.
7. Grigorenko, O.Ya., Efimova T.L. Free axisymmetric vibrations of solidscylinders: Numerical problem solving // Int. Appl. Mech.–2010.– 46, N5.– P. 499–508.
8. Grigorenko A. Ya., Loza I.A. Non-symmetric waves in a Hollow layered cylinder with piezoceramic layers polarized in the axial direction // Int. Appl. Mech.–2014.– 50, N2.– P. 150–158.
9. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (Review) // Int. Appl. Mech.– 2013.– 49, N2.– P. 123–193.

10. Hutchinson S.R., El-Arhari S.A. Vibration of free hollow circular cylinder // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1986.–**53**.– P. 641–646.
11. Loy C.T., Lam K.Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // *Journal of Sound and Vibration* . – 1999. – **226**, N4. – P. 719–737.
12. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // *Mechanics of Composite Materials.*– 1999.–**35**, N4.–P. 285–292.
13. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // *Mechanics of Composite Materials.* – 1997.–**33**, N6.–P. 553–556.
14. Piskunov V.G, Marchuk A.V., and Ilchenko Ya.L. Free vibrations of thick layered cylindrical shells // *Mechanics of Composite Materials.* – 2011.– **47**, N2.– P. 177–184.
15. Singal R.K., Williams K.A. A theoretical and experimental study of vibration of thick circular cylindrical shells and rings // *Trans. ASME. J. of Vibr. Acoust.*– 1988.– **110**.– P. 532– 537.
16. Sheng H.Y. and Ye J.Q. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*– 2003.– **192**.– P. 2441–2459.
17. Shuvalov A.I. and Soldatos K.P. On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.*– 2003.– **259**, N1.– P. 233– 239.
18. So J.I. Leissa A.W. Free vibrations of the thick hollow circular cylinders from 3-d analysis // *Trans. ASME. J. of Vibr. Acoust.*– 1997.– **119**.– P. 89– 95.
19. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with noncircular cross-section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999.– **52**, N8.– P. 237–274.
20. Sofiyev, A.H. Vibration and Stability of Composite Cylindrical Shells Containing a FG Layer Subject to Various Loads // *Structural Engineering and Mechanics: An International Journal.* – 2007. – **27**. – P. 365–391.
21. Suzuki K. Leissa A.W. Free vibrations of noncircular shells having circumferentially varying thickness // *J. Appl. Mech.* – 1985.–**52**, N1.– P. 149–154.
22. Suzuki K. Shikanai G., Leissa A.W. Free vibrations of laminated composite noncircular thin cylindrical shells // *J. Appl. Mech.* – 1994.–**61**, N4.– P. 861–871.
23. Swaddiwudhipong, S., Tian, J. and Wang, C.M. Vibration of Cylindrical Shells with Intermediate Supports // *Journal of Sound and Vibration* . – 1995. – **187**, N1. – P. 69–93.
24. Tahbildar V.G. Gladwell G.M. Finite element analysis of axisymmetric vibration of cylinders // *Journal of Sound and Vibration* . – 1972. – **2**, N1. – P. 143–157.
25. Wang H. Williams K. Vibrational modes of thick cylinders of finite length // *Journal of Sound and Vibration* . – 1996. – **191**, N5. – P. 955–971.
26. Zhang L., Xiang Y. Vibration of open circular cylindrical shells with intermediate ring supports // *Int. J. Solids Struct.*– 2006.– **43**, No.13.– P. 3705–3722.

REFERENCES

1. Grigorenko, J.M., Bepalova, E.I., Kitajgorodskij, A.B., Schinkar, A.I. Svobodnyie kolebaniya elementov obolocheknyih konstruktsiy (Natural vibrations of shells structural elements). K.: Naukova Dumka, 1986 – 172 p. (Rus)
2. Marchuck A.V., Piskunov V.G. Development of mathematical models of forced vibrations of porous structures in three-dimensional statement in accounting for energy dissipation. // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii.* – 1999. – Volume **5**, N3. – P. 119-131. (Rus).
3. Marchuck A.V. Research of forced vibrations the stratified cylindrical shells by the semianalytical method of finite elements. // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii.* – 2013. – Volume **19**, N2. – P. 223-232. (Rus).
4. Altay Gulai, Dokmeci Cengiz M. A polar theory for vibrations of thin elastic shells // *Int. J. Solids Struct.*– 2006.– **43**, N.9.– P. 2578–2601.
5. Amabili M. Effect of boundary conditions on nonlinear vibrations of circular cylindrical panels. // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2007.–**74**, N4.– P. 645–657.
6. Callanhan, J. and Baruh, H. A Closed-Form Solution Procedure for Circular Cylindrical Shell Vibrations. // *International Journal of Solids and Structures.*– 1999. –**36**, N20.– P. 2973–3013.
7. Grigorenko, O.Ya., Efimova T.L. Free axisymmetric vibrations of solidscylinders: Numerical problem solving // *Int. Appl. Mech.*–2010.– **46**, N5.– P. 499–508.

8. Grigorenko A. Ya., Loza I.A. Non-symmetric waves in a Hollow layered cylinder with piezoceramic layers polarized in the axial direction // *Int. Appl. Mech.*–2014.– **50**, N2.– P. 150–158.
9. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (Review) // *Int. Appl. Mech.*– 2013.– **49**, N2.– P. 123–193.
10. Hutchinson S.R., El-Arhari S.A. Vibration of free hollow circular cylinder // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1986.–**53**.– P. 641–646.
11. Loy C.T., Lam K.Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // *Journal of Sound and Vibration* . – 1999. – **226**, N4. – P. 719–737.
12. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // *Mechanics of Composite Materials.*– 1999.–**35**, N4.–P. 285–292.
13. Marchuk A.V., and Piskunov V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // *Mechanics of Composite Materials.* – 1997.–**33**, N6.–P. 553–556.
14. Piskunov V.G, Marchuk A.V., and Ilchenko Ya.L. Free vibrations of thick layered cylindrical shells // *Mechanics of Composite Materials.* – 2011.– **47**, N2.– P. 177–184.
15. Singal R.K., Williams K.A. A theoretical and experimental study of vibration of thick circular cylindrical shells and rings // *Trans. ASME. J. of Vibr. Acoust.*– 1988.– **110**.– P. 532– 537.
16. Sheng H.Y. and Ye J.Q. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*– 2003.– **192**.– P. 2441–2459.
17. Shuvalov A.I. and Soldatos K.P. On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.*– 2003.– **259**, N1.– P. 233– 239.
18. So J.I. Leissa A.W. Free vibrations of the thick hollow circular cylinders from 3-d analysis // *Trans. ASME. J. of Vibr. Acoust.*– 1997.– **119**.– P. 89– 95.
19. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with noncircular cross-section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999.– **52**, N8.– P. 237–274.
20. Sofiyev, A.H. Vibration and Stability of Composite Cylindrical Shells Containing a FG Layer Subject to Various Loads // *Structural Engineering and Mechanics: An International Journal.* – 2007. – **27**. – P. 365–391.
21. Suzuki K. Leissa A.W. Free vibrations of noncircular shells having circumferentially varying thickness // *J. Appl. Mech.* – 1985.–**52**, N1.– P. 149–154.
22. Suzuki K. Shikanai G., Leissa A.W. Free vibrations of laminated composite noncircular thin cylindrical shells // *J. Appl. Mech.* – 1994.–**61**, N4.– P. 861–871.
23. Swaddiwudhipong, S., Tian, J. and Wang, C.M. Vibration of Cylindrical Shells with Intermediate Supports // *Journal of Sound and Vibration* . – 1995. – **187**, N1. – P. 69–93.
24. Tahbildar V.G. Gladwell G.M. Finite element analysis of axisymmetric vibration of cylinders // *Journal of Sound and Vibration* . – 1972. – **2**, N1. – P. 143–157.
25. Wang H. Williams K. Vibrational modes of thick cylinders of finite length // *Journal of Sound and Vibration* . – 1996. – **191**, N5. – P. 955–971.
26. Zhang L., Xiang Y. Vibration of open circular cylindrical shells with intermediate ring supports // *Int. J. Solids Struct.*– 2006.– **43**, No.13.– P. 3705–3722.

РЕФЕРАТ

Марчук О.В. Чисельно-аналітична модель розрахунку вимушених коливань волокнистих порожнистих валів з урахуванням дисипації енергії / О.В. Марчук, С.В. Гнедаш, С.А. Левківський // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник. – К. : НТУ, 2017. – Вип. 1 (37).

У статті запропонований підхід до розрахунку вимушених коливань товстостінних оболонок в умовах осесиметричного згинання з урахуванням дисипації енергії.

Об'єкт дослідження - динамічний напружено-деформований стан шаруватих циліндричних оболонок.

Мета роботи - дослідження вимушених коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок чисельно-аналітичним методом.

Метод дослідження - розроблена авторами математична модель напружено-деформованого стану товстих циліндричних оболонок, та її реалізація на основі поліноміальної апроксимації.

В рамках просторової теорії пружності побудований підхід до дослідження вимушених осесиметричних коливань анізотропних валів з урахуванням дисипації енергії. Підхід заснований на поділі даної оболонки на ряд складових оболонок по товщині. Розподіл шуканих функцій по товщині знаходиться на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь. У плані конструкції шукані функції представляються у вигляді тригонометричних функцій. Проведений аналіз поведінки валів в вимушених коливаннях при крученні на частотах близьких до резонансних.

Результати статті можуть бути використані для розрахунку циліндричних оболонок при визначенні частоти вимушених коливань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ВІЛЬНІ І ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ, РЕЗОНАНС, ДИСИПАЦІЯ, ТОВСТОСТІННІ АНІЗОТРОПНІ ЦИЛІНДРИЧНІ ОБОЛОНКИ, ВОЛОКНИСТІ ПОРОЖНИСТІ ВАЛИ.

ABSTRACT

Marchuck O.V., Gnedash S.V., Levkivskiy S.A. Numerical and analytical model of calculation of fiber hollow shafts forced vibrations taking into account the energy dissipation. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2017. – Issue 1 (37).

This article suggests an approach for calculation of forced vibrations of thick –walled shells under conditions of axisymmetric bending taking into account the energy dissipation.

The object of studying is dynamic stress strain behavior of the multilayer cylindrical shells.

The aim of work is study of the thick anisotropic cylindrical shells forced vibrations using numerical-analytical method.

Research method: stress behavior mathematical model of thick cylindrical sheath condition and its implementing on the basis of polynominal approximity has been developed by the authors.

The approach to the study of forced axisymmetric vibrations of anisotropic shafts taking into account the energy dissipation is built within the framework of the spatial theory of elasticity. The approach is based on splitting of the shell into a number of component shells according to the thickness. Distribution of the required functions according to thickness is found based on the analytical solution of the corresponding system of differential equations. In terms of the design the required functions are presented as trigonometric functions. The analysis of the shafts behavior in the forced vibrations under torsion frequencies close to resonance was carried out.

The article conclusions may be used for analysis of the cylindrical shells while determining frequency of the forced vibrations.

KEY WORDS: FREE AND FORCED VIBRATIONS, RESONANCE, DISSIPATION, THICK ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS, FIBER HOLLOW SHAFTS.

РЕФЕРАТ

Марчук А.В. Численно-аналитическая модель расчета вынужденных колебаний волокнистых полых валов с учетом диссипации энергии / А.В. Марчук, С.В. Гнедаш, С.А. Левковский // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К. : НТУ, 2017. – Вып. 1 (37).

В статье предложен подход к расчету вынужденных колебаний толстостенных оболочек в условиях осесимметрического изгиба, с учетом диссипации энергии.

Объект исследования - динамичное напряженно-деформированное состояние слоистых цилиндрических оболочек.

Цель работы - исследование вынужденных колебаний толстостенных анизотропных цилиндрических оболочек численно-аналитическим методом.

Метод исследования - разработанная авторами математическая модель напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек и ее реализация на основе полиномиальной аппроксимации.

В рамках пространственной теории упругости построен подход к исследованию вынужденных осесимметрических колебаний анизотропных валов с учетом диссипации энергии. Подход основан на разделении данной оболочки на ряд составляющих оболочек по толщине. Распределение искомых функций по толщине находится на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. В плане конструкции искомые функции представляются в виде тригонометрических функций. Проведён анализ поведения валов в вынужденных колебаниях при кручении на частотах близких к резонансным.

Результаты статьи могут быть использованы для расчета цилиндрических оболочек при определении частоты вынужденных колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, РЕЗОНАНС, ДИССИПАЦИЯ, ТОЛСТОСТЕННЫЕ АНИЗОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ, ВОЛОКНИСТЫЕ ПОЛЫЕ ВАЛЫ.

АВТОРИ:

Марчук Олександр Васильович, доктор технічних наук, Національний транспортний університет, професор кафедри опору матеріалів і машинознавства, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380994256775, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 113.

Гнедаш Сергій Вікторович, Національний транспортний університет, аспірант кафедри опору матеріалів і машинознавства, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380635231860, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 113.

Левківський Сергій Анатолійович, Національний транспортний університет, старший викладач кафедри дорожніх машин, e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net, тел. +380978316547, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 226.

AUTHORS:

Marchuck Alexander V., D.Eng., National Transport University professor, Mechanical engineering and strength of materials department professor, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, tel. +380994256775 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 113.

Gnedash Sergij V., National Transport University, postgraduate, department of mechanical engineering and strength of materials, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, tel. +3800635231860 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 113.

Levkivskiy Sergii A., National Transport University, Road vehicles department senior lecturer, e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net, tel. +380978316547 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 226.

АВТОРЫ:

Марчук Александр Васильевич, доктор технических наук, Национальный транспортный университет, профессор кафедры сопротивления материалов и машиноведения, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380994256775, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 113.

Гнедаш Сергей Викторович, Национальный транспортный университет, аспирант кафедры сопротивления материалов и машиноведения, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380635231860, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 113.

Левковский Сергей Анатольевич, Национальный транспортный университет, старший преподаватель кафедры дорожных машин, e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net, тел. +380978316547, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 226.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гайдайчук В.В., доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури, професор, завідувач кафедрою теоретичної механіки, Київ, Україна.

Гуляев В.И., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедрою вищої математики, Київ, Україна.

REVIEWERS:

Gaidaichuk V.V., D.Eng., Kyiv National University of Construction and Architecture professor, Theoretical mechanics department head professor, Kiev, Ukraine.

Gulyaev V.I., D.Eng., National Transport University professor, Higher mathematics department head professor, Kiev, Ukraine.