

УДК 539.3  
UDC 539.3

## ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ АНАЛІЗУ ЯВИЩ ВИПИНАННЯ БУРИЛЬНИХ КОЛОН В КРИВОЛІНІЙНИХ СВЕРДЛОВИНАХ

Шлюнь Н.В., Національний транспортний університет, Київ, Україна,  
nataliyashlyun@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1040-8870

## THEORETICAL FUNDAMENTALS TO ANALYSIS OF THE DRILL STRING BUCKLING PHENOMENA IN CURVILINEAR BORE-HOLES

Shlyun N.V., National Transport University, Kyiv, Ukraine, nataliyashlyun@gmail.com,  
orcid.org/0000-0003-1040-8870

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ АНАЛИЗА ЯВЛЕНИЙ ВЫПУЧИВАНИЯ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СКВАЖИНАХ

Шлюнь Н.В., Национальный транспортный университет, Киев, Украина,  
nataliyashlyun@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1040-8870

Розвиток нафтогазової промисловості та удосконалення умов буріння є одним з найактуальніших питань в нашому столітті. Однією з найважливіших технологічних компонент видобутку вуглеводневих палив є буріння глибоких криволінійних свердловин. Однак їх проходка пов'язана зі значними труднощами, зумовленими постійною змінюваністю балансу сил гравітації, сил опору (сил тертя), сил інерції та сил пружності, що діють на долото і бурильну колону, а також моментів цих сил. Під впливом цих збурень бурильна колона приходить в стан складної напруги і в режимі коливання. При критичних комбінаціях діючих навантажень ці механічні стани можуть втрачати стійкість і супроводжуватися випинанням колони.

### Постановка проблеми.

Для постановки задачі розглянемо бурильну колону (БК) в глибокій скерованій свердловині змінної кривизни. Розглянемо випадок, коли траєкторія свердловини може бути представлена у вигляді гіперболічної кривої (рис. 1), що відображає найбільш типові властивості її геометрії. Дійсно, вона має вертикальну дотичну у верхній точці, і її нижній кінець наближається до прямої лінії, апроксимуючи асимптоту гіперболи.

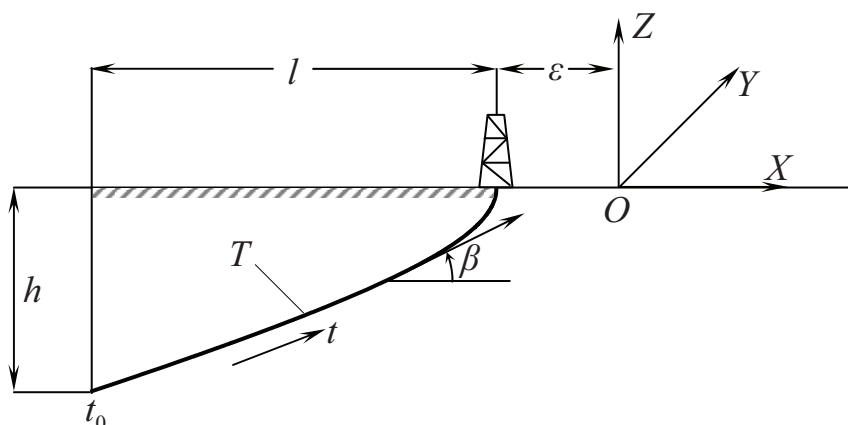


Рисунок 1 – Геометрична схема скерованої свердловини загальної форми

Figure 1 – Geometric scheme of a directed bore-hole

У нерухомій системі координат  $OXYZ$  осьову лінію  $T$  свердловини зручно представити в загальній аналітичній формі

$$X^* = -\varepsilon \operatorname{ch} t, \quad Y^* = 0, \quad Z^* = \lambda \operatorname{sh} t, \quad (1)$$

де  $t$  – безрозмірний параметр,  $\varepsilon$  – піввісь гіперболи,  $\lambda$  – величина, яка характеризує глибину свердловини.

Введемо каналову поверхню  $\Sigma$  свердловини з осовою лінією  $T$  і твірними колами радіусу  $a$ , що дорівнюють міжтрубному зазору  $a = (d_1 - d_2) / 2$ , де  $d_1$  і  $d_2$  – діаметри свердловини і бурильної колони, відповідно. Параметризуємо її параметром  $u$ , пов'язаним з лінією  $T$  свердловини, і параметром  $v$ , що задає положення точки на твірному колі (рис. 2), причому значення  $v = 0$  відповідають нижнім положенням точок на цих колах.

Прийmemo, що в початковому стані бурильна колона лежить на дні свердловини і для її осової лінії  $L$  виконується умова  $v = 0$ . При випинанні БК без відриву ковзає по поверхні свердловини тоді осова лінія колони рухається по каналовій поверхні  $\Sigma$ .

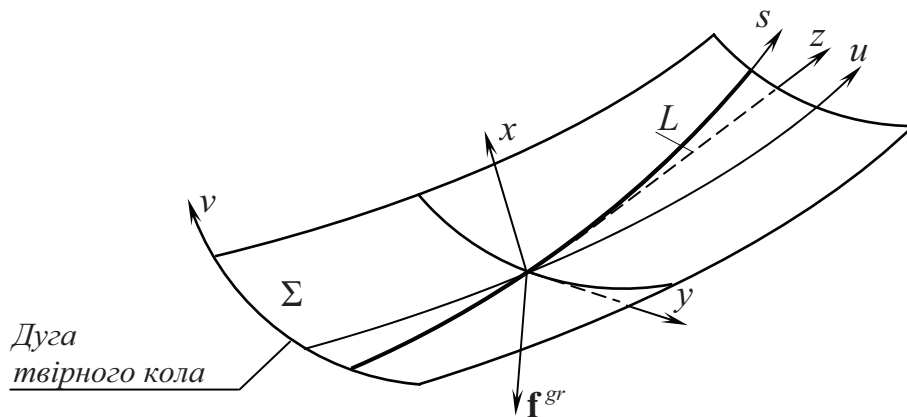


Рисунок 2 – Геометрична схема орієнтації осі  $L$  на каналовій поверхні  $\Sigma$   
 Figure 2 – Geometric scheme of the  $L$  axis orientation in channel surface  $\Sigma$

Щоб описати геометрію осової лінії БК, необхідно задати величини  $h$ ,  $l$ , і  $\varepsilon$ , які визначають розміри (габарити) свердловини і виразити коефіцієнт  $\lambda$  в системі (1) та початкове значення  $t_0$  параметра  $t$  через вихідні дані.

Згідно рис. 2 і рівнянь (1) маємо

$$X^*(t_0) = -\varepsilon \operatorname{ch}(t_0) = -(l + \varepsilon),$$

$$Z^*(t_0) = \lambda \operatorname{sh}(t_0) = -h.$$

Звідси випливає

$$t_0 = \operatorname{arcch}[(\varepsilon + l) / \varepsilon] < 0, \quad \lambda = -h / \operatorname{sh} t_0 > 0. \quad (2)$$

За допомогою цих величин знайдемо кут  $\beta$  нахилу кривої  $T$  (рис. 1). Для цього використовуємо рівність

$$\operatorname{tg} \beta = dZ^* / dX^*.$$

Оскільки

$$dX^* = \dot{X}^* dt, \quad dZ^* = \dot{Z}^* dt,$$

Маємо

$$\beta = \operatorname{arctg}(\dot{Z}^* / \dot{X}^*) = \operatorname{arctg}(-\lambda \operatorname{ch} t / \varepsilon \operatorname{sh} t), \quad (3)$$

де крапкою над символом позначено диференціювання по  $t$ .

Задачу про втрату стійкості БК розв'язуємо на основі використання теорії гнучких криволінійних стрижнів [1,2]. Відповідно до неї представимо нелінійні рівняння гнучких стрижнів в загальній формі та стани, в яких лінеаризований оператор цих рівнянь вироджується, будемо вважати критичними (біфуркаційними). Однак, ця методика виявилася прийнятною тільки для свердловин з найпростішою геометрією, коли кривизна їх осьових ліній незмінна по довжині. У випадках свердловин зі змінною геометрією їх ліній, нелінійні рівняння згинання БК стають настільки складними і громіздкими, що їх важко уявити в явному вигляді. Тому більш раціональним стає відразу формулювати лінеаризоване рівняння, не звертаючись до нелінійного.

Додаткова складність задачі викликана тим, що доводиться одночасно застосовувати два параметри. Один з них ( $t$ ) використовується для параметризації осьової лінії свердловини  $T$ , другий ( $s$ ) – для параметризації осьової лінії БК. Дійсно, параметр  $t$  вже застосований в рівняннях (1) – (3), в той час як параметр  $s$  використовується в теорії гнучких стрижнів для формування рівнянь рівноваги елемента стержня [2,3]

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} = -\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{F}, \quad (4)$$

де  $\mathbf{F}(s)$  – головний вектор внутрішніх сил,  $\mathbf{M}(s)$  – головний вектор внутрішніх моментів,  $\mathbf{f}(s)$  – вектор зовнішніх розподілених сил,  $\boldsymbol{\tau}$  – орт, дотичний до лінії  $L$ ,  $s$  – натуральний параметр.

Зв'язок між векторами  $t$  і  $s$  може бути вираженим диференціальним співвідношенням [3]

$$ds = \sqrt{(dX^*)^2 + (dZ^*)^2} = \sqrt{(\dot{X}^*)^2 + (\dot{Z}^*)^2} dt = \sqrt{(\varepsilon \operatorname{sh} t)^2 + (\lambda \operatorname{ch} t)^2} dt. \quad (5)$$

Тоді маємо

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\varepsilon \operatorname{sh} \xi)^2 + (\lambda \operatorname{ch} \xi)^2} d\xi. \quad (6)$$

При обчисленнях обидва цих параметри задаються одночасно.

Щоб визначити геометрію осьової лінії БК зручно використовувати орт нормалі  $\mathbf{n}$ , бінормалі  $\mathbf{b}$  і дотичної  $\boldsymbol{\tau}$ . При цьому використовуємо припущення, що при трансформуванні лінії  $L$  вона не виходить з контакту з поверхнею  $\Sigma$ , яка обмежує її переміщення. Тому доцільно використовувати також систему відліку  $oxyz$  з ортами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  (рис. 2). При цьому орт  $\mathbf{i}$  спрямований по внутрішній нормалі до поверхні  $\Sigma$ , вектор  $\mathbf{k}$  дотичний до кривої  $L$ , а вектор  $\mathbf{j}$  доповнює систему до правої трійки.

Далі введемо аналог вектора Дарбу [4]

$$\boldsymbol{\omega} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k} \quad (7)$$

де  $k_x$  і  $k_y$  – відповідні компоненти вектора кривизни  $\mathbf{k} = \mathbf{b} / R$ ,  $k_z$  – визначає обертання тригранника  $oxyz$  навколо вектора  $\mathbf{k}$  при його русі вздовж лінії  $L$  [2].

Введені величини визначають геометричні характеристики поверхні  $\Sigma$ . Її рівняння можуть бути представлені в параметричній формі

$$\begin{aligned} X &= X^* + a \sin \beta \cos v = -\varepsilon \operatorname{ch} t + a \sin \beta \cos v, \\ Y &= a \sin v, \\ Z &= Z^* - a \cos \beta \cos v = \lambda \operatorname{sh} t - a \cos \beta \cos v. \end{aligned} \quad (8)$$

В даному випадку радіус  $a$  каналової поверхні малий у порівнянні з іншими її параметрами, тому змінні  $t$  і  $u$  можуть бути суміщені, проте розв'язувальні нелінійні рівняння згинання БК залишаються досить складними. Тому, як зазначено вище, вивчаються критичні стани і малі біфуркаційні переміщення БК, що лежить на дні  $v=0$  поверхні  $\Sigma$ . Тоді немає необхідності спочатку конструювати нелінійні рівняння згинання БК в загальній формі, а потім їх лінеаризувати, як це було зроблено в [1,2,5], а можливо відразу будувати лінеаризовані рівняння стійкості в околі стану рівноваги  $v=0$ . Вони набувають найпростішої форми, якщо їх формулювати в рухомій системі відліку  $oxyz$  з ортами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .

В цьому випадку нелінійні рівняння рівноваги сил

$$\begin{aligned} dF_x / ds &= -k_y F_z + k_z F_y - f_x, \\ dF_y / ds &= -k_z F_x + k_x F_z - f_y, \\ dF_z / ds &= -k_x F_y + k_y F_x - f_z \end{aligned} \quad (9)$$

і рівноваги моментів

$$\begin{aligned} dM_x / ds &= -k_y M_z + k_z M_y + F_y, \\ dM_y / ds &= -k_z M_x + k_x M_z - F_x, \\ dM_z / ds &= -k_x M_y + k_y M_x. \end{aligned} \quad (10)$$

представляються в стандартній, універсальній формі. Вони можуть бути досліджені на будь-якій стадії інтегрування за допомогою двокрокового обчислювального процесу. На першому кроці аналізується передкритичний стан БК і обчислюється внутрішня осьова сила  $F_z(s)$ . На другому кроці рівняння (9), (10) лінеаризуються в околі цього стану і розв'язується крайова задача на власні значення. В результаті визначаються значення критичних навантажень і будується форма випинання.

Приймемо, що в даному випадку здійснюється операція спуску БК, вона не обертається і тому фрикційний крутний момент дорівнює нулю. Нехай рух бурильної колони відбувається з малою швидкістю і силами інерції можна знехтувати та на БК діють тільки сили тяжіння ( $\mathbf{f}^{тяж}$ ), контактні сили ( $\mathbf{f}^{конт}$ ) і сили тертя ( $\mathbf{f}^{тер}$ ). При цьому, завдяки обраній орієнтації системи  $oxyz$ , сили  $\mathbf{f}^{тяж}(s)$  спрямовані уздовж осі  $OZ$ , сила  $\mathbf{f}^{конт}(s)$  діє уздовж нормалі до поверхні  $\Sigma$  і фрикційна сила  $\mathbf{f}^{тер}(s)$  напрямлена в осьовому напрямку проти швидкості елемента БК. У зв'язку з цим дані сили можуть бути представлені в системі  $oxyz$  в вигляді

$$\mathbf{f}^{тяж} = f_x^{тяж} \mathbf{i} + f_y^{тяж} \mathbf{j} + f_z^{тяж} \mathbf{k}, \quad \mathbf{f}^{конт} = f_x^{конт} \mathbf{i}, \quad \mathbf{f}^{тер} = -f_z^{тер} \mathbf{k}. \quad (11)$$

Оскільки БК ковзає уздовж каналової поверхні, фрикційна сила  $f_z^{тер}(s)$  обчислюється за формулою Кулона [6,7]

$$f_z^{тер} = \mu f_x^{конт}, \quad (12)$$

а компоненти повних зовнішніх розподілених сил знаходяться так

$$f_x = f_x^{тяж} + f_x^{конт}, \quad f_y = f_y^{тяж}, \quad f_z = f_z^{тяж} - \mu f_x^{конт}. \quad (13)$$

У передкритичному стані БК лежить на дні каналу і її осьова лінія  $L$  збігається з лінією  $v=0$  на поверхні  $\Sigma$ .

Тоді якщо врахувати, що в цьому стані  $k_x=0$ ,  $k_z=0$ ,  $M_x=0$ ,  $M_z=0$ ,  $F_y=0$ , то з третього рівняння системи (10) можна отримати

$$dM_z / ds = 0 \quad \text{або} \quad M_z(s) = const.$$

Тут  $M_z(s)$  визначається з початкових умов. Прийнемо  $M_z(s) = 0$ . В цьому випадку з систем (4.9), (4.10) випливає

$$\begin{aligned} dF_x / ds &= -k_y F_z - f_x^{\text{мяж}} - f_x^{\text{конт}}, \\ dF_z / ds &= k_y F_x - f_z^{\text{мяж}} + \mu \left| f_x^{\text{конт}} \right|, \\ F_x &= -EIdk_y / ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Ці співвідношення дозволяють вивести рівняння для визначення осьової сили  $F_z(s)$

$$dF_z / ds = -EIk_y dk_y / ds - f_z^{\text{мяж}} + \mu \left| EId^2 k_y / ds^2 - k_y F_z - f_x^{\text{мяж}} \right|. \quad (15)$$

У ньому присутня тільки одна невідома величина  $F_z(s)$ , тому воно легко може бути проінтегровано методом Рунге-Кутта.

Щоб реалізувати другий крок дослідження процесу випинання, необхідно рівняння (9), (10) лінеаризувати в околі  $v = 0$

$$\begin{aligned} d\delta F_x / ds &= -\delta k_y F_z - k_y \delta F_z + \delta k_z F_y + k_z \delta F_y - \delta f_x, \\ d\delta F_y / ds &= -\delta k_z F_x - k_z \delta F_x + \delta k_x F_z + k_x \delta F_z - \delta f_y, \\ d\delta F_z / ds &= -\delta k_x F_y - k_x \delta F_y + \delta k_y F_x + k_y \delta F_x - \delta f_z, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} d\delta M_x / ds &= -\delta k_y M_z - k_y \delta M_z + \delta k_z M_y + k_z \delta M_y + \delta F_y, \\ d\delta M_y / ds &= -\delta k_z M_x - k_z \delta M_x + \delta k_x M_z + k_x \delta M_z - \delta F_x, \\ d\delta M_z / ds &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут символом  $\delta \dots$  позначено малий приріст відповідної величини.

Тоді змінні  $\delta F_x$  і  $\delta F_y$  можуть бути представлені за допомогою рівнянь (17)

$$\begin{aligned} \delta F_x &= -EId\delta k_y / ds = 0, \\ \delta F_y &= EId\delta k_x / ds - EIk_y \delta k_z. \end{aligned} \quad (18)$$

У ейлеровій теорії стійкості прямолінійних стрижнів приймається гіпотеза, що осьова сила в стрижні при втраті стійкості не змінюється. З її використанням третє рівняння системи (16) може бути відкинута, а два інших зведені до вигляду

$$\begin{aligned} EId^2 \delta k_y / ds^2 &= F_z \delta k_y + \delta f_x, \\ EIdk_y / ds \delta k_x + EIk_y d\delta k_z / ds - EId^2 \delta k_z / ds^2 &= -EIdk_y / ds \delta k_z - F_z \delta k_x + \delta f_y. \end{aligned} \quad (19)$$

Вони включають невідомі функції  $\delta k_x$ ,  $k_y$ ,  $\delta k_y$ , і  $\delta k_z$ . Щоб вивести їх, необхідно визначити кривизни кривої  $L$ , що лежить на каналовій поверхні  $\Sigma$ . Тому вони визначаються в термінах її геометричних характеристик. Внутрішня геометрія цієї поверхні задається параметрами  $a_{ij}(u, v)$  її першої квадратичної форми [2,4]

$$\Phi_1(u, v) = a_{11}(u, v)du^2 + 2a_{12}(u, v)dudv + a_{22}(u, v)dv^2. \quad (20)$$

Зовнішня геометрія визначається параметрами  $b_{ij}$  другої квадратичної форми

$$\Phi_2(u, v) = b_{11}(u, v)du^2 + 2b_{12}(u, v)dudv + b_{22}(u, v)dv^2 \quad (21)$$

У цих рівностях  $a_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) компоненти метричного тензора, пов'язаного з поверхнею  $\Sigma$ . Вони характеризують криволінійні координати  $u$ ,  $v$  і геометричні об'єкти, які в ній лежать, в тому числі і кривизну  $k_x$  кривої  $L$ , що ідентифікується геодезичною кривизною  $k^{geod}$ . В околі лінії  $v=0$  каналової поверхні лінії  $u$  і  $v$  ортогональні, тому  $a_{12}(u,0)=0$  і кривизна  $k_x$  може бути представлена за допомогою формули (2.22) [4]

$$k_x = k^{geod} = \sqrt{a_{11}a_{22}} [a_{11}(u')^2 + a_{22}(v')^2]^{-3/2} (u''v' - v''u' + Av' - Bu'), \quad (22)$$

де  $A$  і  $B$  знаходяться через символи Крістофеля.

Якщо взяти до уваги, що  $a \propto \varepsilon$ ,  $a \propto \lambda$  і  $u=t$  ці змінні можна представити в формі

$$a_{11} = \varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 t + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 t, \quad a_{22} = a^2. \quad (23)$$

З їх допомогою знаходяться символи Крістофеля

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{(\varepsilon^2 + \lambda^2) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 t + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 t}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{a} \sin v \dot{\beta} [(\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) + a \cos v \dot{\beta}], & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

У формулі (22) змінні функції залежать від  $t$ , але операція диференціювання виконується відносно змінної  $s$ . У зв'язку з цим необхідно врахувати, що випинання БК відбувається в малому околі стану  $v=0$  і тому  $d.../ds = d.../\sqrt{a_{11}} du = d.../\sqrt{a_{11}} dt$ . Тоді

$$u' = \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \quad u'' = \frac{d^2u}{ds^2} = -\frac{1}{2a_{11}^2} \frac{da_{11}}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{ds}, \quad v'' = \frac{d^2v}{ds^2}. \quad (25)$$

Тепер стає можливим обчислити кривизну

$$k_x = k^{geod} = av'' + \frac{\dot{\beta} \sin v}{a_{11}} (\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta). \quad (26)$$

Форма цієї рівності свідчить про те, що кривизна  $k_x$  дорівнює нулю в передкритичному стані, але при випинанні її варіація становить

$$\delta k_x = \delta k^{geod} = a \delta v'' + \frac{\dot{\beta}}{a_{11}} (\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) \delta v. \quad (27)$$

Параметри другої квадратичної форми  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ , і  $b_{22}$  характеризують форму поверхні  $\Sigma$  і її кривизни. У нашій роботі прийнято, що БК випинає в околі стану  $v=0$ , в якому  $b_{12}=0$ . Інші параметри ( $b_{11}$  і  $b_{22}$ ) можуть бути використані для обчислення головних кривизн  $k_1$  і  $k_2$  поверхні  $\Sigma$  уздовж ліній  $v=const$  і  $u=const$ , відповідно. Вони виражаються за допомогою рівностей

$$k_1 = b_{11} / a_{11}, \quad k_2 = b_{22} / a_{22}. \quad (28)$$

Перепишемо їх в остаточному вигляді

$$k_1 = \frac{\varepsilon \lambda (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)}{(\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 t + \lambda \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{1}{a}. \quad (29)$$

У цьому випадку відповідно до теореми Ейлера [4] кривизна  $k_y$  кривої  $L$  може бути прирівняна до відповідної нормальної кривизни  $k^{норм}$  поверхні  $\Sigma$  в напрямку кривої  $L$ . У той же час кривизна  $k^{норм}$  виражається через нормальні кривизни  $k_1$  і  $k_2$  поверхні  $\Sigma$ :

$$k^{норм} = k_y = k_1 \cos^2 \zeta + k_2 \sin^2 \zeta, \quad (30)$$

де  $\zeta$  – кут між напрямками осьової лінії  $L$  і координатною лінією  $u$ ,  $\zeta = adv / ds$ . У передкритичному стані кут  $\zeta$  дорівнює нулю, тому

$$k_y = \frac{\varepsilon \lambda (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)}{(\varepsilon^2 \operatorname{sh}^2 t + \lambda \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}, \quad (31)$$

Разом з тим при випинанні цей кут набуває малого приросту  $\delta\zeta$ , проте варіація

$$\delta k_y = 2(-k_1 + k_2) \sin \zeta \cos \zeta \delta\zeta = 0 \quad (32)$$

є зневажливо малою. Величина  $k_z$ , що використовується в рівняннях (4.16), (4.17) має особливий сенс, вона визначає обертання системи відліку  $oxyz$  навколо вектора  $\mathbf{k}$ , коли ця система рухається уздовж осьової лінії  $L$  від точки  $s$  до точки  $s + \Delta s$  та обчислюється за допомогою формули

$$k_z = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\psi / \Delta s. \quad (33)$$

Тут  $\Delta\psi$  елементарний кут повороту вектора  $\mathbf{i}$  навколо вектора  $\mathbf{k}$ .

Врахуємо, що  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\lambda \ll 1$ , а кривизна  $k_y$  мала. Тоді в околі передкритичного стану

$$k_z = \sin \zeta \cos \zeta / a = 0. \quad (34)$$

Для малих варіацій  $\delta v$  маємо

$$\delta k_z = d\delta v / ds. \quad (35)$$

Щоб визначити компоненти вектора  $\mathbf{f}^{тяж}$ , представимо його в системі відліку  $oxyz$  (рис. 2)

$$\mathbf{f}^{тяж} = -f^{тяж} \cos \beta \cos \nu \mathbf{i} + f^{тяж} (-\sin \beta \sin \zeta + \cos \beta \sin \nu \cos \zeta) \mathbf{j} + f^{тяж} (-\sin \beta \cos \zeta - \cos \beta \sin \nu \sin \zeta) \mathbf{k}, \quad (36)$$

де  $f^{тяж} = \pi(r_1^2 - r_2^2)(\gamma_{cm} - \gamma_{pid})g$ ;  $r_1, r_2$  – зовнішній і внутрішній радіуси труби БК відповідно;  $\gamma_{cm}, \gamma_{pid}$  – густини матеріалу і промивної рідини;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння.

В даному випадку  $\nu = 0$ ,  $\zeta = 0$ , тому

$$f_x^{тяж} = -f^{тяж} \cos \beta, \quad f_y^{тяж} = 0, \quad f_z^{тяж} = -f^{тяж} \sin \beta. \quad (37)$$

У збуреному стані величини  $\nu$  і  $\zeta$  набувають малих збурень  $\delta\nu$  і  $\delta\zeta = ad\delta\nu / ds$ , тому

$$\delta f_x^{тяж} = 0, \quad \delta f_y^{тяж} = f^{тяж} (-a \sin \beta d\delta\nu / ds + \cos \beta \delta\nu), \quad \delta f_z^{тяж} = 0 \quad (38)$$



З урахуванням рівностей (4.18), (4.19), (4.22), (4.26), (4.27), (4.31), (4.32), (4.34), (4.35) і (4.38) друге рівняння системи (4.16) і перше рівняння системи (4.17) можуть бути зведені до вигляду

$$\begin{aligned} d\delta F_y / ds &= -d\delta v / ds + F_z \left\{ a\delta v'' + \left[ \frac{\dot{\beta}}{a_{11}} (\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) \delta v \right] \right\} - \\ &- f^{\text{мяж}} \left( -a \sin \beta d\delta v / ds + \cos \beta \delta v \right) \\ d\delta k_x / ds &= \frac{1}{EI} \delta F_y - k_y d\delta v / ds, \end{aligned} \quad (39)$$

в той час як ліві частини інших рівнянь систем (16) і (17) тотожно рівні нулю і повинні бути відкинуті.

Рівняння (39) доповнюються рівняннями (27) в формі

$$d\delta v' / ds = \frac{1}{a} \delta k_x - \frac{\dot{\beta}}{aa_{11}} (\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) \delta v \quad (40)$$

і тотожністю

$$d\delta v / ds = \delta(v'). \quad (41)$$

Після відповідних підстановок системи рівнянь (39) – (41) зводяться до одного однорідного диференціального рівняння четвертого порядку

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 \delta v}{ds^4} + \frac{EI}{a} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{\dot{\beta}}{a_{11}} [(\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) + a\dot{\beta}] \delta v \right\} - \\ EI(\varepsilon^2 + \lambda^2) \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{(a_{11})^{3/2}} \frac{d\delta v}{ds} \right\} - F_z \frac{d^2 \delta v}{ds^2} + \frac{F_z(\varepsilon^2 + \lambda^2) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{(a_{11})^{3/2}} \frac{d\delta v}{ds} - \\ - F_z \frac{\dot{\beta}}{aa_{11}} [(\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) + a\dot{\beta}] \delta v - \\ - f^{\text{мяж}} \left( -\sin \beta d\delta v / ds + \frac{\cos \beta}{a} \delta v \right) = 0 \quad 0 \leq s \leq S. \end{aligned} \quad (42)$$

Характерна особливість і складність цього рівняння полягає в тому, що воно включає звичайні похідні по змінній  $t$  (позначені крапкою) і  $s$  одночасно. У процесі реалізації розв'язання ця складність може бути подолана шляхом використання змінної  $s$  для формулювання рівняння (42), в той час як коефіцієнти цього рівняння мають виражатися у відповідних точках змінної  $s$  через змінну  $t$ . Перехід від одного параметра до іншого здійснюється за допомогою рівності (6).

Друга складність обумовлена необхідністю формулювати рівняння (42) в околі заданої функції осьової сили  $F_z(s)$ , яка заздалегідь невідома. Тому проблема розв'язується в два етапи. На першому етапі будується функція  $F_z(s)$  для заданого значення  $F_z(0)$  за допомогою рівняння (15). Потім, на другому етапі, ця функція вставляється в рівняння (42) і перевіряється його виродженість. Якщо це однорідне рівняння є виродженим, воно має ненульові розв'язки (власні форми), а відповідний стан є критичним (біфуркаційним). Тоді відповідна власна форма є формою випинання БК.

При цьому особлива увага має бути приділена чисельній реалізації описаного підходу. Вона переважно пов'язана з тим фактом, що проблема є сингулярно збуреною [1,2,8], і тому її розв'язки мають вигляд локалізованих крайових ефектів або внутрішніх зосереджених збурень. Положення цих збурень наперед невідомо, тому задача не може бути зведена до локального аналізу та має розв'язуватися на базі глобального підходу з пошуком розв'язків у всій області  $0 \leq s \leq S$  довжини БК.

Як зазначено вище, найбільші труднощі поставленої задачі для рівняння (42) пов'язані з великою довжиною  $S$  БК і її малою згинальною жорсткістю. Щоб прокоментувати це твердження,



використовуємо підхід, прийнятий в [8] для обґрунтування сингулярно збурених систем, і проаналізуємо рівняння (42) при обраних значеннях параметрів  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $I = 1,564 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>. Для простоти міркувань покладемо  $S = 10000$  м, тоді рівняння (42) має бути проінтегровано по  $s$  в області  $0 \leq s \leq 10000$ . Однак незвично інтегрувати диференціальне рівняння в такому діапазоні, тому шляхом зміни масштабу параметра  $s$  перейдемо до нової незалежної змінної  $\theta$ . Будемо, наприклад, вимірювати довжину БК в кілометрах (хоча всі інші характеристики БК, включаючи її згинальну жорсткість  $EI$ , залишимо незмінними). Тоді можемо написати  $s = 1000\theta$ , де  $0 \leq \theta \leq \Theta$  і  $\Theta = 10$ . У цьому випадку рівняння (42) може бути перетворено наступним чином.

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{10^{12}} \frac{d^4 \delta v}{d\theta^4} + \frac{EI}{10^6 a} \frac{d^2}{d\theta^2} \left\{ \frac{\dot{\beta}}{a_{11}} [(\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) + a\dot{\beta}] \delta v \right\} - \\ & EI(\varepsilon^2 + \lambda^2) \frac{d^2}{10^6 d\theta^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{(a_{11})^{3/2}} \frac{d\delta v}{10 d\theta} \right\} - F_z \frac{d^2 \delta v}{10^6 d\theta^2} + \\ & \frac{F_z(\varepsilon^2 + \lambda^2) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{(a_{11})^{3/2}} \frac{d\delta v}{10^3 d\theta} + f^{\text{маж}} \sin \beta \frac{d\delta v}{10^3 d\theta} - F_z \frac{\dot{\beta}}{aa_{11}} \times \\ & \times [(\lambda \operatorname{ch} t \sin \beta - \varepsilon \operatorname{sh} t \cos \beta) + a\dot{\beta}] \delta v - f^{\text{маж}} \frac{\cos \beta}{a} \delta v = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \Theta. \end{aligned} \quad (43)$$

Тепер можна бачити, що в цьому рівнянні коефіцієнт перед четвертою похідною дуже малий, в той час як два його наступних члени залишилися незмінними. З цієї причини два цих члени відіграють більш істотну роль в порівнянні з першою складовою. Однак цей перший член відкинути не можна, оскільки в такому випадку зміниться структура рівняння (43) і воно стане описувати зовсім інше явище.

Але рівняння (43) в області ( $0 \leq \theta \leq 10$ ) і рівняння (42) в області ( $0 \leq s \leq 10000$ ) повністю еквівалентні. Тому знову важливість першого члена в рівнянні (42) зневажливо мала в порівнянні з іншими членами. Однак і на цей раз цим членом не можна нехтувати оскільки, якщо його відкинути, то частина, що залишилася в рівнянні (42) стане описувати рівновагу троса, який не може випинати. На практиці, як правило, БК поведуться подібно до тросів, тому англійською мовою їх називають «drill strings» (бурильні струни), а не бурильні стрижні. У той же самий час, якщо колона починає втрачати стійкість, в зоні випинання вона еквівалентна пружному стрижню.

У прикладній математиці рівняння з малим коефіцієнтом перед старшою похідною називається сингулярно збуреним [6]. Як правило, задачі такого виду, є погано обумовлені, вони мають нерегулярні розв'язки, що розгалужуються. Для її аналізу використовується метод скінчених різниць. При його реалізації довжина бурильної колони розбивається на  $n$  скінченно-різних частин  $\Delta s = S/n$  і в кожній вузловій точці  $s_i$  похідні від  $\delta v$  по  $s$  замінюються їх скінченно-різницеви аналогами. Таким чином рівняння (42), дискретизоване в кожній точці  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), дозволяє побудувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Випинання цієї системи визначає наближені значення функцій  $\delta v(s)$  в точках  $s_i$ .

Для реалізації чисельного моделювання розроблено спеціальне математичне забезпечення. Воно складається з програмних блоків, які готують вихідні дані, виконують геометричне моделювання деталей свердловини і встановлюють відповідність між параметрами  $s$  і  $t$ , задають вихідні навантаження та обчислюють внутрішню осьову силу  $F_z(s_i)$  в усіх вузлах скінченно-різницевої області, конструюють скінченно-різницеві рівняння для заданих навантажень і сили  $F_z(s_i)$ , розв'язують систему алгебраїчних рівнянь і обчислюють детермінант матриці, після чого знаходять стан в якому детермінант змінює свій знак, переходячи через нульове значення. Цей стан є критичним, а відповідна власна форма матриці являє собою форму випинання. Далі програма обробляє результати обчислень і будує графіки знайдених функцій.

### Висновки

В даній роботі розроблена методика глобального аналізу випинання бурильної колони в каналі криволінійної свердловини зі змінними геометричними параметрами.

1. Розроблена математична модель втрати стійкості бурильної колони в свердловині з осью лінійною загальною геометрії. Врахована можливість зміни її геометричних характеристик (кута нахилу та кривини) вздовж траєкторії.

2. Обговорюються геометричні властивості відповідних каналових поверхонь із застосуванням методів диференціальної геометрії. Показано, що для цих випадків, параметри зовнішньої та внутрішньої геометрії каналових поверхонь мають складну структуру і тому для них виведення диференціальних рівнянь втрати стійкості в загальній формі пов'язане з великими теоретичними труднощами. У зв'язку з цим запропонований підхід, який базується на безпосередній побудові лінеаризованих рівнянь стійкості бурильної колони.

3. Побудовані диференціальні рівняння втрати стійкості колони в каналі свердловини з гіперболічною осью лінійною, що має змінні параметри геометрії. Запропонована методика обчислення власних значень цих рівнянь та побудови їх власних форм.

#### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N., Shlyun N.V., 2014. Theoretical modelling of post - buckling contact interaction of a drill string with inclined bore-hole surface. *Structural Engineering and Mechanics*. **49**(4): 427–448.
2. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun, N.V. 2015. Critical buckling of drill strings in curvilinear channels of directed bore-holes. *J. Petr. Sci. Eng.* 129: 168–177.
3. Гуляев, В.И. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней / Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л. – К. : Наукова думка, 1992. – 344 с.
4. Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., and Fomenko, A.T., 1992. *Modern Geometry-Methods and Applications*. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.0
5. Musa, N., Gulyayev, V., Shlyun, N., Aldabas, H., 2016. Critical buckling of drill string in cylindrical cavities of inclined bore-holes. *J. of Mech. Eng. and Autom.* 6(1), 25-38.
6. Mitchell, R.F., 2007. The effect of friction on initial buckling of tubing and flowlines. *SPE Drilling & Completion*. **22** (2), 112 – 118.
7. Samuel, R., 2010. Friction factors: What are they for torque, drag, vibration, bottom hole assembly, and transient surge / swab analysis. *J. Petr. Sci. Eng.* 73 (3-4), 258 – 266.
8. Chang, K.W., Howes, F.A., 1984. *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

#### REFERENCES

1. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. (2014) Theoretical modelling of post - buckling contact interaction of a drill string with inclined bore-hole surface. *Structural Engineering and Mechanics*. **49**(4): 427–448 [in English].
2. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun, N.V., (2015) Critical buckling of drill strings in curvilinear channels of directed bore-holes. *J. Petr. Sci. Eng.* 129: 168–177 [in English].
3. Huliaiev, V.I., Haidaichuk, and V.V., Koshkin, V.L. (1992) Upruhoe deformatsionnyye, ustoychivost y kolebaniya hybkykh kryvolynейnykh sterzhnei [Elastic Deforming, Stability and Vibrations of Flexible Curvilinear Rods]. *Naukova Dumka, Kiev*. [in Russian].
4. Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., and Fomenko, A.T. (1992) *Modern Geometry-Methods and Applications*. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York [in English].
5. Musa, N., Gulyayev, V., Shlyun, N., Aldabas, H. (2016) Critical buckling of drill string in cylindrical cavities of inclined bore-holes. *J. of Mech. Eng. and Autom.* 6(1), 25-38 [in English].
6. Mitchell, R.F. (2007) The effect of friction on initial buckling of tubing and flowlines. *SPE Drilling & Completion*. **22** (2), 112 – 118 [in English].
7. Samuel, R. (2010) Friction factors: What are they for torque, drag, vibration, bottom hole assembly, and transient surge / swab analysis. *J. Petr. Sci. Eng.* 73 (3-4), 258 – 266 [in English].
8. Chang, K.W., Howes, F.A. (1984) *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo [in English].

#### РЕФЕРАТ

Шлюнь Н.В. Теоретичні передумови аналізу явищ випинання бурильних колон в криволінійних свердловинах / Н.В. Шлюнь // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник. – К. : НТУ, 2018. – Вип. 1 (40).

У роботі розглядаються теоретичні передумови аналізу випинання бурильної колони в каналі криволінійної свердловини зі змінними геометричними параметрами. Розроблена математична модель втрати стійкості бурильної колони в свердловині з осью лінійною загальної геометрії. Врахована можливість зміни її геометричних характеристик (кута нахилу та кривини) вздовж траєкторії. Для виведення диференціальних рівнянь втрати стійкості БК в загальній формі запропоновано підхід, який базується на безпосередній побудові лінеаризованих рівнянь стійкості бурильної колони. Побудовані диференціальні рівняння втрати стійкості колони в каналі свердловини з гіперболічною осью лінійною, що має змінні параметри геометрії. Запропонована методика обчислення власних значень цих рівнянь та побудови їх власних форм.

Об'єкт дослідження – бурильні колони в каналах криволінійних свердловин.

Мета роботи – дослідити ефект втрати стійкості та біфуркаційного випинання БК.

Методи дослідження – бурильна колона ототожнювалася з наддовгим трубчастим стержнем. Математична модель квазістатичної поведінки бурильної колони до її фрикційної взаємодії зі стінкою свердловини будувалась у вигляді сингулярно збурених диференціальних рівнянь руху обертового наддовгого стержня в пружній постановці. Для аналізу випинання бурильної колони використовуються методи теорії стійкості рівноваги та біфуркацій.

Результати статті можуть бути впроваджені в технології буріння глибоких свердловин.

Прогнозні припущення щодо розвитку об'єкта дослідження – пошук оптимальних режимів буріння.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** БУРИЛЬНА КОЛОНА, КРИВОЛІНІЙНА СВЕРДЛОВИНА, СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ, БІФУРКАЦІЙНЕ ВИПІНАННЯ.

### ABSTRACT

Shlyun N.V. Theoretical fundamentals to analysis of the drill string buckling phenomena in curvilinear bore-holes. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2018. – Issue 1 (40).

In the paper, the theoretic fundamentals to analysis of the drill string buckling in the channel of a curvilinear bore-hole with varying geometry is considered. A mathematic model of the drill string stability loss in the bore-hole with arbitrary geometry axis line is elaborated. The possibility of geometric parameters (inclination angle and curvatures) change along axis line are taken into account. To construct the general form of the drill string buckling differential equations, the approach is proposed, which is based on the immediate formulation of the linearized equations of the drill string stability. The differential equations of the drill string stability loss in the bore-hole channel with hyperbolic axis line of variable geometry parameters are constructed. The techniques for calculation of eigen values of these equations and eigen modes construction are proposed.

The research aim to study the effect of the stability loss and bifurcational buckling of the drill strings.

The method of analysis. The drill string is considered as long elastic tube rod. Mathematical model of the rod quasistatic mechanical behavior in the case of its friction interaction with the bore-hole wall is constructed in the form of singularly perturbed differential equations of a long string with the use of elastic statement. To analyse the drill string buckling, the methods of the theory of equilibrium stability and bifurcations are used.

The results of the article can be inculcated in technologies of deep bore-hole drilling.

Forecast assumptions about the object of study – the search of optimal regimes of drilling.

**KEYWORDS:** DRILL STRING, INCLINED BORE-HOLE, BIFURCATION BUCKLING.

### РЕФЕРАТ

Шлюнь Н.В. Теоретические предпосылки анализа явлений выпучивания бурильных колонн в криволинейных скважинах / Н.В. Шлюнь // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К. : НТУ, 2018. – Вып. 1 (40).

В работе рассматриваются теоретические предпосылки анализа выпучивания бурильной колонны в канале криволинейной скважины с переменными геометрическими параметрами. Разработана математическая модель потери устойчивости бурильной колонны в скважине с осевой линией общей геометрии. Учтена возможность изменения ее геометрических характеристик (угла наклона и кривизны) вдоль траектории. Для вывода дифференциальных уравнений потери устойчивости БК в общей форме предложен подход, основанный на непосредственном построении линейаризованных уравнений устойчивости бурильной колонны. Построенные дифференциальные уравнения потери устойчивости колонны в канале скважины с гиперболической осевой линией, что

имеет сменные параметры геометрии. Предложенная методика вычисления собственных значений этих уравнений и построения их собственных форм.

Объект исследования – бурильные колонны в каналах наклонных скважин.

Цель работы – исследовать эффект потери устойчивости и бифуркационного выпучивания БК.

Методы исследования – бурильная колонна отождествлялась со сверхдлинным трубчатым стержнем. Математическая модель квазистатического поведения бурильной колонны при ее трением взаимодействии со стенкой скважины строилась в виде сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений движения вращающегося сверхдлинного стержня в упругой постановке. Для анализа выпучивания бурильной колонны используются методы теории устойчивости равновесия и бифуркаций

Результаты статьи могут быть внедрены в технологии бурения глубоких скважин.

Прогнозные предположения о развитии объекта исследования – поиск оптимальных режимов бурения.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** БУРИЛЬНАЯ КОЛОННА, КРИВОЛИНЕЙНАЯ СКВАЖИНА, УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ, БИФУРКАЦИОННОЕ ВПУЧИВАНИЕ.

**АВТОР:**

Шлюнь Н.В., асистент, Національний транспортний університет, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, тел. +380675936346, Україна, 01010, м. Київ, вул. Кіквідзе, 42, к. 511, orcid.org/0000-0003-1040-8870

**AUTHOR:**

Shlyun N. V., asistent, National Transport University, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, tel. +380675936346, Ukraine, 01010, Kyiv, Kikvidze str., 42, of. 511, orcid.org/0000-0003-1040-8870

**АВТОР:**

Шлюнь Н.В., асистент, Национальный транспортный университет, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, тел. +380675936346, Украина, 01010, г. Киев, ул. Киквидзе, 42, к. 511, orcid.org/0000-0003-1040-8870

**РЕЦЕНЗЕНТИ:**

Гайдайчук В.В., доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

Лоза І.А., доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

**REVIEWERS:**

Gaidaichuk V.V., Ph.D., Engineering (Dr.), professor, Kyiv National University of Structures and Architecture, Head of Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.

Loza I.A., Ph.D., Physics and Mathematics (Dr), professor, National Transport University, Head of Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.