УДК 625.7/.8 DOI: 10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461
UDC 625.7/.8

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОМЕХАНІКИ ШАРУВАТИХ ДОРОЖНІХ ПОКРИТТІВ

Шлюнь Н.В., кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна, nataliyashlyun@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1040-8870

Білобрицька О.І., кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна, olenkab@ukr.net, orcid.org/0000-0002-6751-6592

SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS OF THERMO-MECHANICS OF LAYERED ROAD COATINGS

Shlyun N.V., Ph.D., National Transport University, Kyiv, Ukraine, nataliyashlyun@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1040-8870

Bilobrytska O.I., Ph.D, National Transport University, Kyiv, Ukraine, olenkab@ukr.net, orcid.org/0000-0002-6751-6592

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ СЛОИСТЫХ ДОРОЖНЫХ ПОКРЫТИЙ

Шлюнь Н.В., кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина, nataliyashlyun@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1040-8870.

Билобрыцька Е.И., кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина, olenkab@ukr.net orcid.org/0000-0002-6751-6592

Вступ

Однією з найактуальніших проблем сьогодення України є будівництво нових і відновлення старих автомобільних доріг. Багатошарові дорожні конструкції можна віднести до одного з найбільш складних видів будівельних конструкцій задач науки про міцність та довговічність будівельних об'єктів. В першу чергу це пояснюється багатопараметричністю факторів, які визначають їх конструкції, властивості матеріалів, види навантажень та впливів на них, а також умов їх експлуатації. Тому проектувальникам дорожніх конструкцій та спеціалістам, що займаються теоретичним моделюванням механічної поведінки шаруватих масивів в процесі експлуатації, доводиться враховувати багато додаткових факторів, які ускладнюють їх роботу.

Постановка проблеми.

Перед тим, як звернутися до розв'язання задач термопружності розглянемо одну їх властивість, типову для рівнянь теплопровідності і механіки.

Багато математичних моделей, які адекватно описують фізичні процеси в термінах диференціальних рівнянь, містять (в явному або в неявному вигляді) і різні параметри, причому в типовій ситуації їх значення відомі лише наближено, з тією чи іншою точністю. Тому питання про характер поведінки розв'язків диференціального рівняння при незначній зміні величини параметра, що входить в рівняння, становить принципову цікавість. Починаючи з класичних робіт А. Пуанкаре і О.М. Ляпунова, досить детально вивчався так званий регулярний випадок − коли права частина рівняння, наприклад, ІІ-го порядку

$$x'' = F\left(t, x, x', \varepsilon\right) \qquad \left(0 \le t \le 1\right) \tag{1}$$

регулярно (неперервно, гладко, аналітично) залежить від параметра ε в околі значення $\varepsilon = 0$, а розв'язки рівняння розглядаються на скінченному відрізку $0 \le t \le 1$ зміни незалежної змінної t. В цьому випадку для розв'язку такого рівняння при довільному малому ε існує близьке йому рівняння, що відповідає значенню параметра $\varepsilon = 0$.

Значно різноманітнішим і складнішим є сингулярний випадок, коли розв'язки залежать від малого параметру ε при другій похідній (тут насамперед слід згадати теорію усереднення Крилова-Боголюбова-Митропольського), і коли не виконується припущення про регулярність належності параметра рівнянню. Очевидно, що остання із перелічених ситуацій виникає, наприклад, для рівняння

$$\varepsilon x'' = f\left(t, x, x'\right) \ \left(0 \le t \le 1\right) \qquad (2)$$

де ε − параметр, який набуває як завгодно малих додатних значень (часто пишуть: $0 < \varepsilon << 1$. Відмітимо, щоб застерегти від помилки, що спроба заміни незалежної змінної $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$ і $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{\varepsilon d\tau^2}$ хоча і приводить рівняння (2) до «регулярного виду»

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon d^2x}{\varepsilon d\tau^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = f\left(\tau, x, x', \varepsilon\right), \qquad (3)$$

проте при цьому кінцевому відрізку зміни нової змінної τ відповідає лише дуже малий (разом з ε) відрізок $0 \le t \le \varepsilon \cdot 1$ зміни старої змінної t .

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Математична теорія диференціальних рівнянь з малим параметром при старших похідних не надто давня. Мабуть, вперше на прикладну актуальність вивчення сингулярно збурених задач (і на «неминучість» їх появи серед математичних моделей природознавства) звернув увагу Л. Прандтль у зв'язку з розвиненою ним в 1904 р. теорією пограничного шару в гідродинаміці. Сингулярно збурені задачі неодноразово виникали (не завжди, втім, усвідомлено) і пізніше в механіці, фізиці, техніці (нагадаємо для прикладу почате в 20-х роках Б. Ван-дер-Полем вивчення релаксаційних коливань в радіотехнічних приладах). Проте єдиних математичних підходів до подібних задач довго не існувало, кожна з них розглядалася ізольовано і розв’язувалась – з тією або іншою мірою строгості і повноти – індивідуальними прийомами.

«Малий множник при старшій похідній породив велику теорію» – ця фраза з математичного фольклору досить колоритно характеризує велику гілку теорії диференціальних рівнянь. Парадоксально, але ця гілка, отримавши сьогодні широку популярність у теоретиків і маючи важливе значення для прикладників, так і не отримала єдиного, загальновживаного найменування. Одні автори називають об'єкт дослідження «рівнянням з малим параметром при старших похідних», інші говорять про «сингулярне збурення», треті використовують різноманітну термінологію, породжену численними застосуваннями: завдання «з пограничним шаром», «з крайовим ефектом», «зі стрибком ущільнення». Досить поширеним в літературі з прикладної математики є термін «жорсткі диференціальні рівняння», що стосуються даного випадку. Мабуть, перше з усіх наведених назв – найбільш точне, хоча воно дещо довге і тому не дуже зручне. Що стосується терміну «сингулярне збурення», то, незважаючи на його, взагалі кажучи, ширший, але розпливчатий сенс, він набагато точніше характеризує даний фізичний процес, пов'язаний з утворенням сингулярностей в прикрайових зонах шуканої функції. Тому надалі будемо використовувати цей термін.

Рівняння з сингулярним збуренням (з малим параметром при старшій похідній) привернули увагу цілого ряду вчених – С.Е. Хайкіна, Л.І. Гутенмахера, І.С. Градштейна, К. Фрідріхса, В. Вазова, Н. Левінсона, А.М. Тихонова, Л.А. Люстерніка, А.Б. Васильєвої, М.Й. Вішіка, O'Donnell та ін. Важливо зауважити, що ця увага, як правило, породжувалася не просто допитливістю, а стимулювалася конкретними прикладними проблемами (наприклад, актуальними в той час проблемами конструювання аналогових обчислювальних пристроїв). Однак їх роботи не в повній мірі розкрили внутрішню специфіку досліджуваного об'єкту, не містили вдалої і досить загальної методики його дослідження. У самостійну математичну теорію вивчення диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній сформувалося тільки після основоположних публікацій А.М. Тихонова 1948-1952 рр.

Відмічені особливості сингулярно збурених задач призводять до того, що шукана функція набуває вигляду крайового ефекту. У зв’язку з цим її важко апроксимувати простими аналітичними або чисельними методами. Тому при розв’язанні конкретних задач використовується метод виділення крайового ефекту. При його застосуванні повний (глобальний) розв’язок задачі комбінується з двох частин. Одна частина містить правильні розв’язки тільки в зоні граничного шару (рис. 1) та при віддаленні від нього, цей розв’язок не задовольняє вихідним рівнянням. Друга частина розв’язку виявляється дійсною лише при віддалені від границі повної області, що розглядається та перестає задовольняти розв’язувальним рівнянням при наближенні до краю. Після побудови двох цих розв’язків їх не коректні зони видаляється й вони сполучаються так, щоб в зоні сполучення вони співпадали. В останні роки у зв’язку з розвитком методів обчислювальної математики стало можливим будувати глобальні розв’язки синулярно збуреної задачі за один прийом, уникаючи розділення шуканої функції на граничний шар та зовнішній розв’язок.

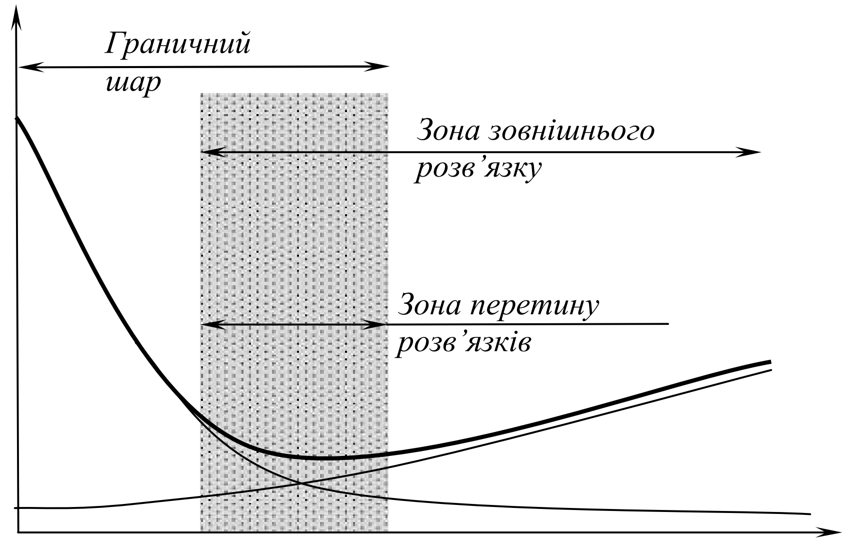

Рисунок 1 – Схема сполучення шуканої функції сингулярно збуреної задачі на ділянці граничного шару та зовнішнього розв'язку.

Figure 1 – Schematic of the conjugation of a required function for the singularly perturbed problem in the domain of the boundary layer and the external solution.

Сингулярно збурені рівняння в термомеханіці шаруватих дорожніх покриттів

Сингулярний характер диференціальних рівнянь не обов'язково повинен бути пов'язаний з наявністю малого параметра ε при старшій похідній. Досить поширеними бувають випадки, коли сингулярність збурення диференціальних рівнянь є прихованою (неявною) і обумовлена великою довжиною L відрізка інтегрування рівнянь. Дійсно, для таких задач від рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, x'), \quad 0 \le t \le L, \quad L >> 1 \tag{4}$$

за допомогою заміни

$$t = L\tau, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{L^2}\frac{d^2x}{d\tau^2} \tag{5}$$

можна перейти до рівняння

$$\frac{1}{L^2}\frac{d^2x}{d\tau^2} = f(\tau, x, x'), \quad 0 \le \tau \le 1\,. \tag{6}$$

Оскільки $L>>1$, то $\frac{1}{L^2} = \varepsilon$ і рівняння (6) стає еквівалентним сингулярно збуреному рівнянню (2).

До таких типів рівнянь належить розглянута в даній роботі система диференціальних рівнянь пружного згину шаруватих дорожніх покриттів і теплопровідності. При цьому складність розв'язування цих рівнянь істотно перевершує складність сингулярно збурених рівнянь, відомих в науковій літературі. По-перше, це зумовлено тим, що в задачах дорожнього будівництва механіка пружного згину покриття (умовно, балки на пружній основі) описується рівняннями не другого, а четвертого порядку, і відрізок інтегрування L досягає великих значень. Тому параметр ε при старшій (четвертій) похідній при масштабуванні відрізка інтегрування L до одиниці набуває значення $\varepsilon = 1/L^4$.

До теперішнього часу «малому множнику при старшій похідній» присвячена величезна кількість робіт багатьох авторів, які вивчали початкові і крайові задачі, властивості, поведінку, думки і оцінки різних типів розв'язків, різноманітні додатки, а також різні модифікації проблеми, її узагальнення та споріднені питання.

Несподівано ці задачі виникли і в проблемах дорожнього будівництва у зв'язку з необхідністю моделювання генерування в дорожніх покриттях функцій напружено-деформованого стану, сконцентрованих у вигляді сингулярностей в крайових зонах і в малих околах ділянок прикладання транспортних навантажень та високоградієнтних полів температури.

Дійсно, явища, що протікають в дорожньому покритті, лежачому на ґрунтовому масиві та підданий дії локалізовано-вертикальному навантаженню від автомобільного колеса, можемо описувати моделлю пружної плити, що лежить на пружній основі. В свою чергу, для наочності, розглянемо випадок, коли навантаження локалізоване вздовж відрізка прямої. Тоді ця задача зводиться до плоского випадку рівноваги плоскої системи в площині, перпендикулярній відрізку розподілу навантаження і плита може бути замінена балкою на пружній основі. Її деформування описується рівнянням

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=q\left(x\right)\qquad\left(0\le x\le L\right),\tag{7}$$

де коефіцієнт постелі k визначається пружними властивостями ґрунтового масиву, $q\left(x\right)$ – інтенсивність розподіленого навантаження.

Нехай, наприклад, ширина дороги $l=10\,м$, але нам зручніше розглянути деформування покриття в діапазоні від нуля до одиниці. Зробимо це, здійснивши перехід до нового масштабу незалежної змінної $X=x/10$. Тоді

$$x=10X\,,\qquad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^4y}{10^4dX^4}$$

і рівняння (1.8) набуде вигляду

$$\frac{EI}{10^4}\frac{d^4y}{dX^4}+ky=q\left(x\right),\qquad\left(0\le x\le 1\right).\tag{8}$$

Тут коефіцієнт перед старшою похідною став на чотири порядки меншим і вплив другого доданку став більш помітним. Однак першим доданком неможливо знехтувати, так як в цьому випадку рівняння (8) змінить свою структуру

$$ky=q\left(x\right)\qquad\left(0\le x\le 1\right)\tag{9}$$

і вже не буде диференціальним. Тому рівняння (8) є сингулярно збуреним, і оскільки рівняння (7) і (8) еквівалентні, то сингулярно збуреним є і рівняння (7) з розв'язками у вигляді сингулярностей та крайових ефектів. Причому ефект сингулярного збурення зростає зі збільшенням значення k. Звідси випливає, що сингулярно збуреною є і задача теорії пружності про деформування багатошарового покриття дороги і вона має розв'язок також у вигляді сингулярностей.

Складність задачі про теплове деформування дорожнього покриття ще більше посилюється в зв'язку з тим, що сингулярно збуреною також є задача про розподіл в його масиві полів температури. Для підтвердження цього судження розглянемо явище поширення тепла вглиб дорожнього масиву (вздовж координати x_3). Нехтуючи тепловими потоками в горизонтальному напрямі, запишемо рівняння нестаціонарної теплопровідності у вигляді

$$\frac{\partial^2T}{\partial x_2^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}\tag{10}$$

де a – коефіцієнт теплопровідності.

Будемо вважати, що в результаті теплового збурення дорожнього масиву добовими змінам температури $T\left(x_2,t\right)$ на вільній поверхні $x_2=0$ покриття при денному нагріванні та нічному охолодженні температури на поверхні $x_2=0$ можна вважати відомою, тобто $T\left(0,t\right)$ $\left(0\le t\le 12\,год\right)$. Врахуємо, що коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів покриття маленькі, обрана для аналізу товщина багатошарового покриття (розрахункова глибина масиву) не мала і розрахункова протяжність зміни зовнішньої температури (12 годин) порівняно мала. Тоді роль доданку в лівій частині рівняння (10) (друга похідна по x_2) набагато менша ролі доданку в його правій частині (перша похідна по t) і рівняння (10) також є сингулярно збуреним. Зазначимо, що ця особливість рівнянь теплопровідності (рівнянь математичної фізики параболічного типу) широко відома в прикладній математиці і вона у повному обсязі відображена в науковій літературі [7, 8, 9]. В нашому випадку ця особливість проявляється в тому, що розв'язок задачі теплопровідності також має вигляд крайового ефекту, локалізованого в елементах покриття, прилеглих до його вільної поверхні. Також високоградієнтний розподіл температури $T\left(x_2, t\right)$ вглиб призводить до великих значень нормальних і дотичних напружень, що провокують розтріскуванням і розшаруванням верхніх шарів покриття. Вони підтверджені результатами комп'ютерного моделювання.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гайдайчук В.В. Моделювання напружено-деформованого стану конструкції дорожнього одягу під дією транспортних навантажень / В.В. Гайдайчук, В.В. Мозговий, Ю.О. Заєць, Л.В. Шевчук // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99 – С.45 – 57.
2. Гуляєв В.І. Дослідження напружено-деформованого стану дорожнього одягу з укріпленою основою під поперечними тріщинами і швами. / В.І. Гуляєв, В.В. Мозговий, О.О. Густєлєв, Н.В. Шлюнь, О.М. Куцман, С.А. Баран // Вісник Національного транспортного університету. — 2019. — Вип. 43. − С. 26 − 38.
3. Гуляєв В.І. Термопружний стан багатошарових дорожніх покриттів. / [В.І. Гуляєв, В.В. Гайдайчук, В.В. Мозговий та ін.] – НТУ, Київ, 2018. 252с.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. / А.Д. Коваленко. − Киев: Наукова Думка, 1970. − 239 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. / В. Новацкий. − М.: Мир, 1975 − 872 с.
6. Русак В. Н. Математическая физика. – URSS, 2006. – 248 с.
7. Чанг Н., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. − М.: Мир, 1988. − 247 с.
8. Шишкин Г.И. Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – Т.29, № 7. – С. 963 – 977.
9. Shishkin G.I. Method of splitting for singularly perturbed parabolic equations // East-West J.Numer. Math. – 1993. – V.1, № 2. – P. 147 – 163.

REFERENCES

1. Gaydaychuk, V.V., Mozgoviy, V.V., Zaets, Yu. A., Shevchuk, L.V. (2017) Modeliuvannia napruzheno-deformovanoho stanu konstruktsii dorozhnoho odiahu pid diieiu transportnykh navantazhen [Simulation of stress-strain states of road structures under action of transport loads]. Opir materialiv i teoriia sporud – [Strength of Materials and Theory of structures], 99, 45-57 [in Ukrainian].
2. Gulyayev, V. I., Mozgoviy, V.V., Gustelev, O.O., Shlyun, N.V., Kutsman, O.M., Baran, S.A. (2019) Doslidzhennia napruzheno-deformovanoho stanu dorozhn'oho odiahu z ukriplenoiu osnovoiu pid poperechnymy trischynamy i shvamy [Investigation of the stress-strain state of road clothing with reinforced base under transverse cracks and joints]. Visnyk Natsionalnoho transportnoho universytetu – [Herald of National Transport University], 43, 26-38.
3.Gulyayev, V. I., Gaydaychuk, V.V., Mozgoviy, V.V. (2018) Termopruzhnyi stan bahatosharovykh dorozhnikh pokryttiv [Thermoelastic state of multilayer pavements]. Kyiv. [in Ukrainian].
4.Kovalenko, A.D. (1970) Osnovy termopruzhnosti [Thermoelasticity fundamentals]. Kyiv: Naukova Dumka [in Russian].
5.Novatskiy, V. (1975) Teoryia upruhosty [Theory of elasticity]. Moskva: Mir [in Russian].
6.Rusak V. N. (2006) Matematycheskaia fyzyka. URSS, 248 p.
7.Chanh, N., Haues, F. (1988) Nelyneinыe synhuliarno vozmushchennыe kraevыe zadachy [Nonlinear singularly perturbed boundary value problems]. Moskva: Mir [in Russian].
8.Shyshkyn H.Y. (1989) Approksymatsyia reshenyi synhuliarno vozmushchennykh kraevykh zadach s parabolycheskym pohranychnym sloem // Zhurnal vychyslytelnoi matematyky y matematycheskoi fyzyky. 29(7), 963 – 977.
9.Shishkin G.I. (1993) Method of splitting for singularly perturbed parabolic equations // East-West J.Numer. Math., 1(2), 147 – 163.

РЕФЕРАТ

Шлюнь Н.В. Сингулярно збурені задачі термомеханіки шаруватих дорожніх покриттів / Н.В. Шлюнь, О.І. Білобрицька // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки» . Науково-технічний збірник– К. : НТУ, 2020. – Вип. 1 (46).

Обговорюється задача про сингулярну збуреність рівнянь пружного згину шаруватих дорожніх покриттів і теплопровідності. Показано, що складність розв’язування цих рівнянь істотно перевершує складність сингулярно збурених рівнянь, відомих в науковій літературі. По-перше, це зумовлено тим, що в задачах дорожнього будівництва механіка пружного згину описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, і область інтегрування досягає великих розмір.

Розглянуто задачу про теплове деформування дорожнього покриття та розподіл в його масиві полів температури, переміщень та напружень. Доведено, що розв’язок задачі теплопровідності має вигляд крайового ефекту, локалізованого в елементах покриття, прилеглих до його вільної поверхні. Відмічено також, що високоградієнтний розподіл температури глиб масиву призводить до великих значень нормальних і дотичних напружень, що провокують розтріскування і розшарування верхніх шарів покриття. Вони підтверджені результатами комп’ютерного моделювання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА, ШАРУВАТЕ ДОРОЖНЕ ПОКРИТТЯ, ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРИ, ТРАНСПОРТНЕ НАВАНТАЖЕННЯ, ПОЛЕ НАПРУЖЕНЬ, ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН.

ABSTRACT

Shlyun N.V., Bilobrytska O.I. Singularly perturbed problems of thermo-mechanics of layered road coatings. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2020. – Issue 1 (46).

The problem of singular perturbation of the equations of elastic bending of layered pavements and thermal conductivity is discussed. It is shown that the complexity of solving these equations significantly exceeds the complexity of singularly perturbed equations known in the scientific literature. First, this is due to the fact that in the problems of road construction, the mechanics of elastic bending are described by the partial differential equations, and the integration domain reaches large dimensions.

The problem of thermal deformation of the pavement and distribution in its array of temperature, displacement, and stress fields is also considered. It is proved that thesolution of the problemof thermal conductivity has the appearance of a boundary effect, localized in the elements of the coating adjacent to its free surface.Also is noted that high-gradient temperature distribution deep in the soil leads to large values of normal and tangential stresses that provoke cracking and delamination of the upper layers of the coating. They are confirmed by the results of computer simulation.

KEYWORDS: SINGULARLY PERTURBED PROBLEM, LAYERED ROAD COVERING, TEMPERATURE FIELD, TRANSPORT LOAD, STRESS FIELD, THERMAL STRAIN STATE.

РЕФЕРАТ

Шлюнь Н.В. Сингулярно возмущенные задачи термомеханики слоистых дорожных покрытий / Н.В. Шлюнь, Е.И. Билобрыцька // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К.: НТУ, 2020. – Вып. 1 (46).

Обсуждается задача о сингулярной возмущенности уравнений упругого изгиба слоистых дорожных покрытий и теплопроводности. Показано, что сложность решения этих уравнений существенно превосходит сложность сингулярно возмущенных уравнений, известных в научной литературе. Во-первых, это обусловлено тем, что в задачах дорожного строительства механика упругого изгиба описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, и область интегрирования достигает больших размеров.

Рассмотрена задача о тепловом деформирования дорожного покрытия и распределение в его массиве полей температуры, перемещений и напряжений Доказано, что решение задачи теплопроводности имеет вид краевого эффекта, локализованного в элементах покрытия, прилегающих к его свободной поверхности. Отмечено также, что высокоградиентное распределение температуры вглубь массива приводит к большим значениям нормальных и касательных напряжений провоцирующих растрескивание и расслоение верхних слоев покрытия. Они подтверждены результатами компьютерного моделирования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ, СЛОИСТЫЕ ДОРОЖНЫЕ ПОКРЫТИЯ, ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ, ТРАНСПОРТНЫЕ НАГРУЗКИ, ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ, ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ.

АВТОРИ:

Шлюнь Наталія Володимирівна, кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, доцент, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, тел. +38(044) 280-71-09, Україна, 01103, м. Київ, вул. М. Бойчука, 42, orcid.org/0000-0003-1040-8870.

Білобрицька О.І., кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: olenkab@ukr.net, тел. +38(044) 280-71-09, Україна, 01103, м. Київ, вул. М. Бойчука, 42, orcid.org/0000-0002-6751-6592.

AUTHORS:

Shlyun N.V., Ph.D., National Transport University, tel. +38(044) 280-71-09, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1040-8870

Bilobrytska O.I., Ph.D, National Transport University, tel. +38(044) 280-71-09, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42. e-mail: olenkab@ukr.net, orcid.org/0000-0002-6751-6592.

АВТОРЫ:

Шлюнь Наталия Владимировна, кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, доцент, e-mail: nataliyashlyun@gmail.com, тел. +38(044) 280-71-09, Украина, 01103, г. Киев, ул. М. Бойчука, 42, orcid.org/0000-0003-1040-8870.

Билобрыцька Елена Ивановна, кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, доцент, e-mail: olenkab@ukr.net, тел. +38(044) 280-71-09, Киев, Украина, ул. М. Бойчука, 42, orcid.org/0000-0002-6751-6592.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гайдайчук В.В., доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

Лоза І.А., доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, Київ, Україна.

REVIEWERS:

Gaidaichuk V.V., Dr. Sc. (Engineering), Professor, Kyiv National University of Structures and Architecture, Head of Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.

Loza I.A., Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, National Transport University, Head of Department of Theoretical and Aplied Mechanics, Kyiv, Ukraine.