УДК 517.9
UDC 517.9
DOI: 10.33744/2308-6645-2022-1-51-048-054

ПРО ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Вишенська О.В., кандидат фізико-математичних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна, oksana.vyshenska@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3360-8552

FINITE ELEMENT MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF PAVE STRUCTURES UNDER THE ACTION OF TRANSPORT LOADS

Vyshenska O.V., Ph. D., National Transport University, Kyiv, Ukraine, oksana.vyshenska@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3360-8552

Постановка проблеми.

Еволюційні процеси, що зазнають короткочасної дії певних сил, зустрічаються у різних областях фізики, техніки, економіки. При математичному моделюванні таких процесів у випадках, коли їх еволюція є сукупністю відносно плавної зміни і короткочасних збурень, що трапляються час від часу, зручно не зважати на тривалість цих з

бурень і вважати їх миттєвими. Отримана при цьому математична модель такого роду еволюційного процесу є системою диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

Важливим за своїм теоретичним та практичним значенням є вивчення властивостей розв’язків диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, а також множин цих розв’язків, що «вкривають» деякі поверхні розширеного фазового простору, котрі називають інтегральними поверхнями або інтегральними множинами.

Виклад основного матеріалу.

В роботах [1-3]досліджувалося існування інваріантних множин деяких класів систем диференціальних рівнянь. В даній роботі узагальнюється один із отриманих там результатів.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \varphi \notin \Gamma, \\ &\Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma} = I(\varphi), \qquad\quad \Delta\varphi\big|_{\varphi\in\Gamma} = a, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$; $f(\varphi)$ та $I(\varphi)$ – кусково-неперервні з розривами першого роду на множині Γ функції, 2π-періодичні по кожній компоненті φ_j, $j = \overline{1,m}$; $A(\varphi)$ – неперервна 2π-періодична по кожній компоненті φ_j квадратна матриця; Γ – $(m-1)$-мірний многовид $< k, \omega >= 0 \pmod{2\pi}$ такий, що $k = (k_1, ..., k_m)$ – цілочисловий вектор і $\langle k, \omega \rangle \neq 0$: $a = (a_1, ..., a_m)$ – числовий вектор такий, що $\langle k, a \rangle = 0 \pmod{2\pi}$.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв’язок системи

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \varphi \notin \Gamma, \\ &\Delta\varphi\big|_{\varphi\in\Gamma} = a. \end{aligned} \tag{2}$$

З’ясуємо, за якої умови траєкторія цього розв’язку всюди щільно заповнює тор T^m.

Будь яка неперервна траєкторія $\varphi = \omega t + \varphi_0$ перетинає многовид Γ через однакові інтервали часу $\beta = \dfrac{2\pi}{< k,\omega >}$.

Розглянемо траєкторію системи (2), яка проходить через точку $0 : \varphi_t = \varphi_t\left(0\right)$. Наступною точкою перетину її з Γ буде $\dfrac{2\pi}{< k,\omega >}\omega$. Після першого стрибка отримаємо точку

$$\frac{2\pi}{< k,\omega >}\omega + a\,.$$

Назвемо ділянку руху, яка складається із однієї неперервної дуги і одного стрибка, одним тактом руху. Початковими точками окремих тактів руху є , як видно точки

$$S\left(\frac{2\pi}{< k,\omega >}\omega + a\right),$$

де S – ціле число.

Звідси випливає як умова замкненості траєкторії $\varphi_t\left(\varphi\right)$ так і умова її всюди щільності на торі. Саме: 1) траєкторія $\varphi_t\left(\varphi\right)$ замкнена тоді і тільки тоді, коли всі координати вектора $B = \dfrac{1}{< k,\omega >}\omega + \dfrac{1}{2\pi}a$ раціональні; 2) траєкторія $\varphi_t\left(\varphi\right)$ всюди щільна на торі тоді і тільки тоді, коли координати вектора B раціонально незалежні. Для інших траєкторій обидві умови залишаються такими ж.

Розглянемо, зокрема, двовимірний тор T^2. Тоді Γ: $k\varphi_1 + m\varphi_2 = 0$, $k,m \in Z$. Траєкторії $\varphi_t\left(\varphi\right)$ замкнені тоді і тільки тоді, коли числа

$$S_i = \frac{\omega_i}{k\omega_1 + m\omega_2} + \frac{1}{2\pi}a_i, \quad i = 1,2$$

раціональні. Якщо S_i – ірраціональні, то кожна траєкторія $\varphi_t\left(\varphi\right)$ всюди щільно лежить на торі T^2.

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)x.$$

Позначимо $t_i\left(\varphi\right)$ – моменти попадання точки, яка рухається по $\varphi_t\left(\varphi\right)$, на криву Γ. Нехай $Y\left(t,\tau,\varphi\right)$ – нормована фундаментальна матриця цієї системи. Тоді

$$x_t\left(\varphi\right) = \int_{-\infty}^{t} Y\left(t,\tau,\varphi\right) f\left(\varphi_\tau\left(\varphi\right)\right)d\tau + \sum_{t_i\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)<t} Y\left(t,t_i\left(\varphi\right),\varphi\right) I\left(\varphi_{t_i}\left(\varphi\right)\right) - \tag{3}$$

сімейство обмежених на всій часовий осі розв’язків неоднорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)x + f\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)$$

в припущенні, що інтеграл і сума в (3) рівномірно збіжні.

Замінимо в (3) φ на φ_{-t}, отримаємо:

$$\begin{aligned} x_t\left(\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right) &= \int\limits_{-\infty}^{t} Y\left(t,\tau,\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right) f\left(\varphi_{\tau-t}\left(\varphi\right)\right)d\tau + \\ &+ \sum_{t_i\left(\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right)<t} Y\left(t,t_i\left(\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right),\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right) I\left(\varphi_{t_i\left(\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right)}\left(\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right)\right).... \end{aligned} \tag{4}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} &t_i\left(\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right) - t_i\left(\varphi\right) = t, \qquad \varphi_{t+s}\left(\varphi\right) = \varphi_t\left(\varphi_s\left(\varphi\right)\right), \\ &Y\left(t,\tau,\varphi+2\pi\right) = Y\left(t,\tau,\varphi\right), \quad Y\left(t,t+\tau,\varphi_{-t}\left(\varphi\right)\right) = Y\left(0,\tau,\varphi\right) \end{aligned}$$

і вважаючи, що $x_t\left(\varphi\right) = u\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)$, із рівності (4) маємо:

$$u\left(\varphi\right) = \int\limits_{-\infty}^{0} Y\left(0,\tau,\varphi\right) f\left(\varphi_\tau\left(\varphi\right)\right)d\tau + \sum_{t_i\left(\varphi\right)<0} Y\left(0,t_i\left(\varphi\right),\varphi\right) I\left(\varphi_{t_i}\left(\varphi\right)\right). \tag{5}$$

Таким чином, функція $u\left(\varphi\right)$ визначає інваріантну множину системи рівнянь (1)

$$x = u\left(\varphi\right), \quad u\left(\varphi+2\pi\right) = u\left(\varphi\right).$$

Дійсно, при $t \neq t_i\left(\varphi\right)$ функція $x_t\left(\varphi\right) = u\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right)x + f\left(\varphi_t\left(\varphi\right)\right),$$

а при $t = t_i\left(\varphi\right)$ – умові стрибка

$$\Delta x = u\left(\varphi_{t_i+0}\left(\varphi\right)\right) - u\left(\varphi_{t_i-0}\left(\varphi\right)\right) = I\left(\varphi_{t_i}\left(\varphi\right)\right).$$

Отже, $\left(x_t\left(\varphi\right),\varphi_t\left(\varphi\right)\right)$ – розв'язок системи (1). Так як траєкторії $\varphi_t\left(\varphi\right)$ перетинають Γ через однакові часові інтервали, тобто

$$\beta = t_{i+1}\left(\varphi\right) - t_i\left(\varphi\right) = \frac{2\pi}{<k,\omega>} = const,$$

для збіжності інтегралу і суми із (3) достатньо, щоб функція $Y\left(t,\tau,\varphi\right)$ задовольняла нерівність

$$\left\|Y\left(t,\tau,\varphi\right)\right\| \le K\exp\left(-\gamma\left(t-\tau\right)\right) \tag{6}$$

для всіх $t,\tau \in R$, $t \ge q$, $\varphi \in T^m$ при деяких додатніх K і γ.

Якщо ця умова виконується, то із (3) маємо

$$\left\| x_t(\varphi) \right\| \le \frac{K}{\gamma} \max_{\varphi \in T^m} \left\| f(x) \right\| + \frac{K}{1-\exp(-\gamma\beta)} \max_{\varphi \in T^m} \left\| I(\varphi) \right\| \tag{7}$$

для всіх $t \in R$ і $\varphi \in T^m$.

Крім того, із (7) при

$$c = \max\left\{ \frac{K}{\gamma}, \frac{K}{1-\exp(-\gamma\beta)} \right\}$$

отримуємо

$$\left\| u(\varphi) \right\| \le c \max\left\{ \max_{\varphi \in T^m} \left\| f(\varphi) \right\|, \max_{\varphi \in T^m} \left\| I(\varphi) \right\| \right\}. \tag{8}$$

Отримані результати сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Нехай в системі рівнянь (1) функції $f(\varphi)$ і $I(\varphi)$ 2π-періодичні кусково-неперервні на T^m з розривами першого роду при $\varphi \in \Gamma$; $A(\varphi)$ – неперервна на T^m 2π-періодична матриця. Якщо матриця $Y(t,\tau,\varphi)$ задовольняє оцінці (6), то система рівнянь (1) має асимптотично стійку інваріантну множину

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$

де $u(\varphi)$ – кусково-неперервна з розривами першого роду на множині Γ функція, яка задовільняє нерівність (8).

Як і в [1] можна отримати наступні достатні умови виконання нерівності (6).

Якщо координати вектора B раціонально незалежні і

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m < 0, \tag{9}$$

де $\Lambda(\varphi)$ – найбільше власне число матриці $A^{\bullet}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(A(\varphi) + A'(\varphi) \right)$, то нерівність (6) виконується.

Застосувавши з очевидними змінами ітераційний процес, запропонований в [2] і використаний в [1], до слабо нелінійної системи

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x\big|_{\varphi \in \Gamma} = I(\varphi, x), \qquad \Delta\varphi\big|_{\varphi \in \Gamma} = a, \end{gathered} \tag{10}$$

де $f(\varphi,x)$ і $I(\varphi,x)$ визначені для всіх $\varphi\in T^m$, $x\in R^n$ кусково-неперервні з розривами першого роду на множині Γ, періодичні з періодом 2π по φ і задовільняють умові Ліпшиця по x рівномірно відносно $\varphi\in T^m$:

$$\left\|f(\varphi,x')-f(\varphi,x'')\right\|+\left\|I(\varphi,x')-I(\varphi,x'')\right\|<N\left\|x'-x''\right\|$$

для всіх $x',x''\in R^n$, отримаємо наступне твердження.

Теорема 2. Якщо для матриці $A(\varphi)$ виконується умова (9), то при достатньо малій сталій Ліпшиця N система рівнянь (1) має асимптотично стійку інваріантну множину

$$x=u(\varphi),\qquad u(\varphi+2\pi)=u(\varphi),$$

де $u(\varphi)$ – кусково-неперервна з розривами першого роду при $\varphi\in\Gamma$ функція і

$$\Delta u\big|_{\varphi_t(\varphi)\in\Gamma}=I\left(\varphi_t(\varphi),u\left(\varphi_t(\varphi)\right)\right).$$

Теорема 2 залишається справедливою і для системи

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\qquad \frac{dx}{dt}=A(\varphi)x+f(\varphi,x),\quad \varphi\notin\Gamma,$$
$$\Delta\varphi\big|_{\varphi\in\Gamma}=a(\varphi),\qquad \Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma}=I(\varphi,x)$$

у припущенні, що кожна із траєкторій системи

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\quad \varphi\notin\Gamma,\quad \Delta\varphi\big|_{\varphi\in\Gamma}=a(\varphi)$$

всюди щільно лежить на торі. Тут $a(\varphi)$ – неперервна 2π-періодична функція така, що $<k,a(\varphi)>=0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Перестюк Н.А. Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр.мат.журн. – 1984. – 36, №1. – С.63-68.
2. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер.мат.- 1970. – 34, №6. – С.1219-1240.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 286 с.
4. Самойленко А.М., Станжицький О.М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. – Київ: Наукова думка, 2009.
5. Парасюк І.О., Перестюк М.О. Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013.

REFERENCES

1. Perestiuk N.A. (1984). *Ynvaryantnыe mnozhestva odnoho klassa razrыvnыkh dynamycheskykh system - Ukr.mat.zhurn., 36 (№1), 63-68 [in Russian].*
2. Samoilenko A.M. (1970) *O sokhranenyy ynvaryantnoho tora pry vozmushchenyy - Yzv. AN SSSR. Ser.mat., 34 (№6), 1219-1240 [in Russian].*

3. Samoilenko A.M., Perestiuk N.A. «Dyfferentsyalnыe uravnenyia s ympulsnыm vozdeistvyem» Kyev, Vyshcha shk., 1987. P.286.
4. Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. «Yakisnyi ta asymptotychnyi analiz dyferentsialnykh rivnian z vypadkovymy zburenniamy» Kyiv, Naukova dumka, 2009.
5. Parasiuk I.O., Perestiuk M.O. «Lokalnyi analiz neliniinykh dyferentsialnykh rivnian» Kamianets-Podilskyi, Aksioma, 2013.

РЕФЕРАТ

Вишенська О.В. Про існування інваріантного тора одного класу розривних динамічних систем / О.В. Вишенська // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науковий журнал. – К. : НТУ, 2022. – Вип. 1 (51).

Розглянуто систему диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями. Необхідність вивчення таких систем пов’язана зокрема із запитами новітньої техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи займають помітне місце та інтенсивно розвиваються, збільшуючи коло своїх застосувань в різноманітних за своєю фізичною природою та функціональним призначенням технічних задачах.

Сформульовано достатні умови існування та асимптотичної стійкості інваріантної множини динамічної системи, що зазнає імпульсного збурення:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt}=A(\varphi)x+f(\varphi), & \dfrac{d\varphi}{dt}=\omega, \quad \varphi\notin\Gamma, \\ \Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma}=I(\varphi), & \Delta\varphi\big|_{\varphi\in\Gamma}=a, \end{array}, \qquad (1)$$

де $x=(x_1,...,x_n)$, $\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_m)$, $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$; $f(\varphi)$ та $I(\varphi)$ – кусково-неперервні з розривами першого роду на множині Γ функції, 2π-періодичні по кожній компоненті φ_j, $j=\overline{1,m}$; $A(\varphi)$ – неперервна 2π-періодичні по кожній компоненті φ_j квадратна матриця; Γ – $(m-1)$-мірний многовид $<k,\omega>=0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ такий, що $k=(k_1,...,k_m)$ – цілочисловий вектор і $\langle k,\omega\rangle\neq 0$: $a=(a_1,...,a_m)$ –числовий вектор такий, що $\langle k,a\rangle=0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

Теорема. Якщо для матриці $A(\varphi)$ виконано умову $\dfrac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\Lambda(\varphi)d\varphi_1\ldots d\varphi_m<0,$ то при достатньо малій сталій Ліпшиця N система рівнянь (1) має асимптотично стійку інваріантну множину

$$x=u(\varphi), \qquad u(\varphi+2\pi)=u(\varphi),$$

де $u(\varphi)$ – кусково-неперервна з розривами першого роду при $\varphi\in\Gamma$ функція і

$$\Delta u\big|_{\varphi_t(\varphi)\in\Gamma}=I\left(\varphi_t(\varphi),u\left(\varphi_t(\varphi)\right)\right).$$

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ІМПУЛЬСНЕ ЗБУРЕННЯ, АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ.

ABSTRACT

Vyshenska O.V. Finite element modeling of the stress-strain state of pave structures under the action of transport loads. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific journal. – Kyiv: National Transport University, 2022. – Issue 1 (51).

A system of differential equations with discontinuous trajectories is considered. The need to study such systems is associated primarily with the demands of the latest technology, where pulse automatic control systems, pulse computing systems have taken a very prominent place and are being intensively developed,

expanding the range of their applications in technical problems that are heterogeneous in physical nature and functional purpose.

Sufficient conditions for the existence and asymptotic stability of the invariant set of a dynamical system subjected to impulsive action are formulated:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \varphi \notin \Gamma, \\ &\Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma} = I(\varphi), \qquad \Delta\varphi\big|_{\varphi\in\Gamma} = a, \end{aligned}, \qquad (1)$$

where $x = (x_1,...,x_n)$, $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m)$, $\omega = (\omega_1,...,\omega_m)$; $f(\varphi)$ та $I(\varphi)$ – piecewise continuous with discontinuities of the first kind on the set Γ functions, 2π-periodic by each component φ_j, $j = \overline{1,m}$; $A(\varphi)$ – continuous 2π-periodic by each component φ_j square matrix; Γ – $(m-1)$-dimensional manifold $< k,\omega >= 0 \pmod{2\pi}$ such that $k = (k_1,...,k_m)$ – integer vector and $\langle k,\omega\rangle \neq 0$: $a = (a_1,...,a_m)$ – number vector such that $\langle k,a\rangle = 0 \pmod{2\pi}$.

Theorem. If for the matrix $A(\varphi)$ condition $\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Lambda(\varphi)d\varphi_1\ldots d\varphi_m < 0,$ then for a sufficiently small Lipschitz constant N system of equations (1) has an asymptotically stable invariant set

$$x = u(\varphi), \qquad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$

where $u(\varphi)$ – piecewise continuous with discontinuities of the first kind as $\varphi \in \Gamma$ function and

$$\Delta u\big|_{\varphi_t(\varphi)\in\Gamma} = I\left(\varphi_t(\varphi), u\left(\varphi_t(\varphi)\right)\right).$$

KEY WORDS: DIFFERENTIAL EQUATIONS, IMPULSIVE ACTION, ASYMPTOTIC STABILITY.

АВТОРИ:

Вишенська Оксана Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний транспортний університет, доцент кафедри вищої математики, e-mail: oksana.vyshenska@gmail.com, тел. +38(044) 280-71-09, Україна, 01103, м. Київ, вул. М. Бойчука, 42, orcid.org/0000-0002-3360-8552.

AUTHORS:

Vyshenska O.V., Ph.D., National Transport University, tel. +38(044) 280-71-09, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42, e-mail: oksana.vyshenska@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3360-8552.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гончаренко Ю.В., кандидат фізико-математичних наук, КНУ імені Тараса Шевченка, доцент кафедри обчислювальної математики, Київ, Україна.

Мейш Ю.А., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, професор кафедри вищої математики, Київ, Україна.

REVIEWERS:

Goncharenko Yu.V., Ph.D., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Numerical Mathematics, Kyiv, Ukraine.

Meish Yu.A, Dr. Sci., (Engineering), Professor, National Transport University, Department of Higher Mathematics, Kyiv, Ukraine.